

- ▶ alternative Idee, wenn Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind: Erfahrung aus Versuchen
  - ▶ Man wiederhole ein Zufallsexperiment  $n$ -mal unabhängig voneinander, wobei jedes Ereignis  $A$  bei jeder Durchführung dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt einzutreten.
  - ▶ Bezeichne  $f_n(A)$  die relative Häufigkeit des Eintretens von  $A$  bei  $n$  Wiederholungen.
  - ▶ Dann gilt empirisch:

$$f_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$

- Zufallsexperiment „Werfen einer Münze“. Ereignis  $A$  steht für Eintreten von Zahl.

$n$	1	2	3	4	5
Ergebnis	Z	K	K	Z	Z
$f_n(A)$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{3} = 0.33$	$\frac{2}{4} = 0.5$	$\frac{3}{5} = 0.6$
$n$	6	7	8	9	10
Ergebnis	K	Z	Z	Z	Z
$f_n(A)$	$\frac{3}{6} = 0.5$	$\frac{4}{7} = 0.57$	$\frac{5}{8} = 0.62$	$\frac{6}{9} = 0.67$	$\frac{7}{10} = 0.7$
$n$	11	12	13	14	15
Ergebnis	K	K	K	Z	K
$f_n(A)$	$\frac{7}{11} = 0.64$	$\frac{7}{12} = 0.58$	$\frac{7}{13} = 0.54$	$\frac{8}{14} = 0.57$	$\frac{8}{15} = 0.53$
$n$	16	17	18	19	20
Ergebnis	Z	K	Z	Z	K
$f_n(A)$	$\frac{9}{16} = 0.56$	$\frac{9}{17} = 0.53$	$\frac{10}{18} = 0.56$	$\frac{11}{19} = 0.58$	$\frac{11}{20} = 0.55$

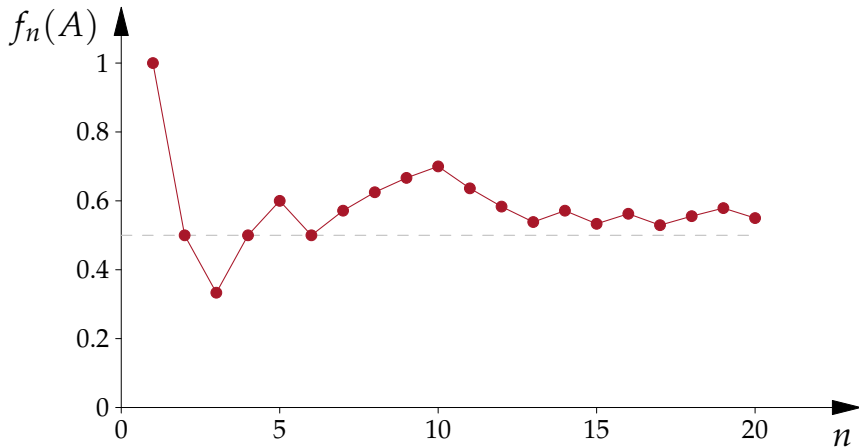


Abb.: Relative Häufigkeit  $f_n(A)$  des Ereignisses „Zahl“ bei  $n$  Wiederholungen des Münzwurfs

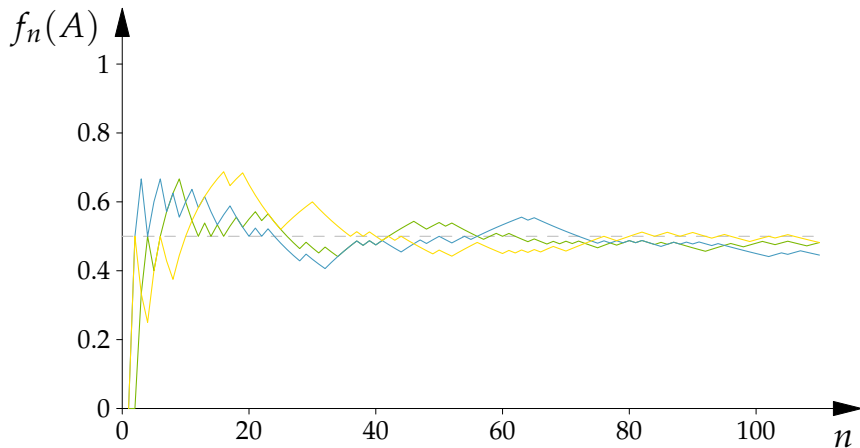


Abb.: Relative Häufigkeit  $f_n(A)$  des Ereignisses „Zahl“ bei  $n$  Wiederholungen des Münzwurfs für drei Serien

- ▶ Für großes  $n$  liegt die relative Häufigkeit  $f_n(A)$  für das Auftreten von  $A$  mit großer Wahrscheinlichkeit nahe bei der Wahrscheinlichkeit  $P(A)$ , d. h.

$$f_n(A) \approx P(A),$$

und für  $n \rightarrow \infty$  „konvergiert“  $f_n(A)$  gegen  $P(A)$ .

- ▶ Die Eigenschaft  $f_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$  wird als **empirisches Gesetz der großen Zahlen** bezeichnet.



- ▶ Wahrscheinlichkeiten werden im Allgemeinen als relative Häufigkeiten bestimmt und interpretiert.
- ▶ Der Unterschied zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit ist folgender:
  - ▶ relative Häufigkeit: bezieht sich auf den erfassten Zustand einer Stichprobe in der Vergangenheit
  - ▶ Wahrscheinlichkeit: bezieht sich auf ein zukünftiges Ereignis
- ▶ Jede Wahrscheinlichkeit ist als Erwartungswert einer relativen Häufigkeit deren mathematische Abstraktion: Aus Erfahrung wird Erwartung.

# 5. Diskrete Zufallsvariablen und Verteilungen

- ▶ Ergebnisse von Zufallsvorgängen sind nicht immer Zahlen.
  - ▶ z. B. Zufallsexperiment „Werfen einer Münze“
- ▶ Oft interessiert man sich auch nicht primär für die zugrundeliegenden Ergebnisse selbst, sondern für daraus abgeleitete Zahlen.
  - ▶ z. B. „Wie oft tritt Kopf bei mehrmaligem Werfen einer Münze auf?“
- ▶ Ordnet man den Ergebnissen eines Zufallsvorgangs Zahlen zu, so erhält man eine *Zufallsvariable*.

- ▶ **Zufallsvariable**  $X$ : eine Variable oder ein Merkmal, dessen Werte oder Ausprägungen die Ergebnisse eines Zufallsvorgangs sind
- ▶ **Realisierung**  $x$ : Zahl  $\in \mathbb{R}$ , die eine Zufallsvariable  $X$  bei einer Durchführung des Zufallsvorgangs annimmt
- ▶ **Wertemenge** oder **Träger**  $T$  von  $X$ : die Menge aller möglichen Realisierungen einer Zufallsvariable  $X$





- ▶ Zufallsexperiment „2-maliges Werfen eines Würfels“:
  - ▶ Zufallsvariable  $X$  = „Summe der Augenzahlen“
  - ▶ Zufallsvariable  $Y$  = „Anzahl der geraden Augenzahlen“
  - ▶ ...
- ▶ Produktionsprozess einer Glühbirne (komplexes Zufallsexperiment, da viele vom Zufall abhängige Einflüsse):
  - ▶ Zufallsvariable  $X$  = „Lebensdauer einer Glühbirne“
  - ▶ Zufallsvariable  $Y$  = „Leistung einer Glühbirne“
  - ▶ ...

- ▶ Man interessiert sich bei Zufallsvariablen für Ereignisse folgender Art bzw. deren Wahrscheinlichkeit.

Ereignis:

$$\{X = x\}$$

$$\{X \neq x\}$$

$$\{X \leq x\}$$

$$\{X > x\}$$

$$\{a \leq X \leq b\}$$

Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = x)$$

$$P(X \neq x)$$

$$P(X \leq x)$$

$$P(X > x)$$

$$P(a \leq X \leq b)$$



- ▶ Zufallsvariablen werden mit großen Buchstaben, z. B.  $X$ , bezeichnet.
- ▶ Realisierungen werden mit kleinen Buchstaben, z. B.  $x$ , bezeichnet.
- ▶ Eine Stichprobe ist die  $n$ -fache Realisierung einer Zufallsvariable  $X$ .
- ▶ Begriffe zur Skalierung von Merkmalen und die Unterscheidung in diskrete und stetige Merkmale werden auf Zufallsvariablen übertragen.

- ▶ Eine Zufallsvariable  $X$  heißt **diskret**, falls sie nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  annehmen kann.
- ▶ Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von  $X$  ist durch die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \dots$$

gegeben. Diese wird oft in Form einer (Verteilungs-)Tabelle dargestellt.



- ▶ Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion**  $f(x)$  einer diskreten Zufallsvariable  $X$  ist für  $x \in \mathbb{R}$  definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = p_i, & x = x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist somit analog zur relativen Häufigkeitsverteilung.

- ▶ grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion durch ein Stab- oder Säulendiagramm
- ▶ Stabhöhe über  $x_i, i = 1, 2, \dots, k, \dots$  gleich  $p_i$

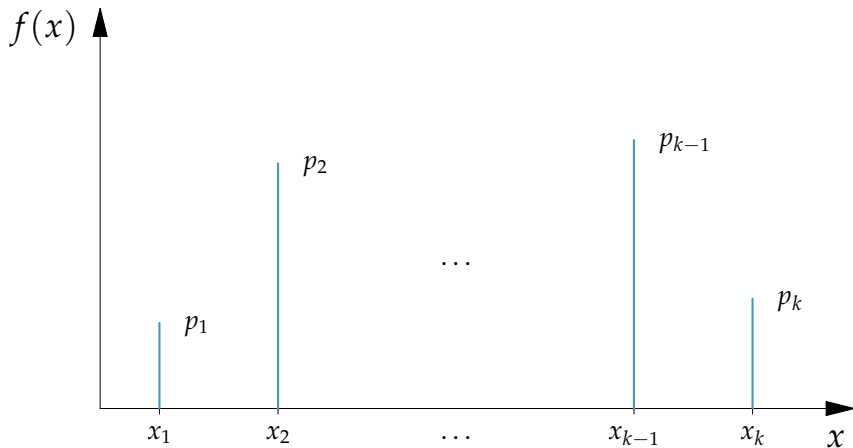


Abb.: Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. -funktion einer diskreten Zufallsvariable  $X$

- ▶ **Verteilungsfunktion** der Zufallsvariable  $X$ : Funktion, die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert kleiner  $x$  oder gleich  $x$  annimmt
  - ▶ Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable ist gegeben durch

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i | x_i \leq x} f(x_i),$$

wobei  $f(x_i)$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion bezeichnet.

- ▶ Eigenschaften:
  - ▶  $F(x)$  ist eine Treppenfunktion, die an den Stellen  $x_i$  um den Wert  $p_i = f(x_i)$  nach oben springt; dazwischen verläuft sie konstant.
  - ▶ An den Sprungstellen ist der obere Wert, d. h. die Treppenkante, der zugehörige Funktionswert (Fkt. somit rechtsseitig stetig).
- ▶ Verteilungsfunktion somit analog zur empirischen Verteilungsfunktion

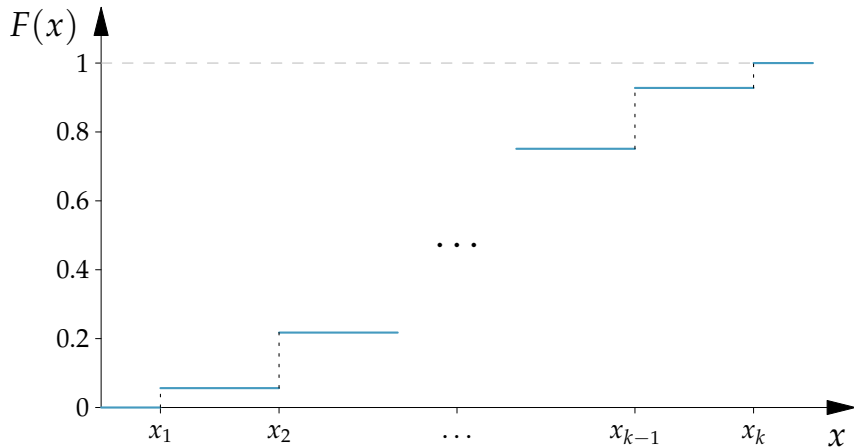


Abb.: Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable

# Bsp. $f(x)$ und $F(x)$ (1)

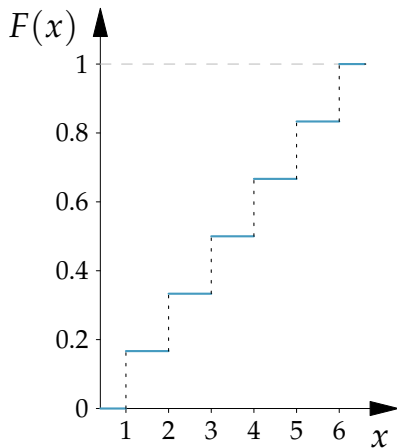
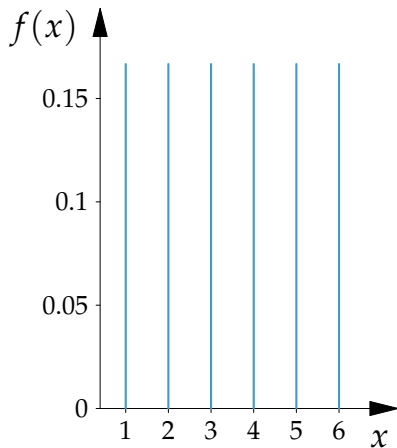


Abb.: Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable  $X$  = „Augenzahl“ bei einmaligem Würfeln

# Bsp. $f(x)$ und $F(x)$ (2)

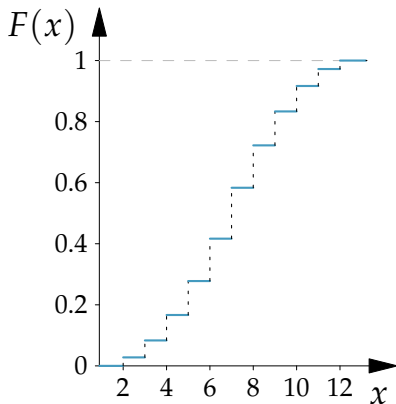
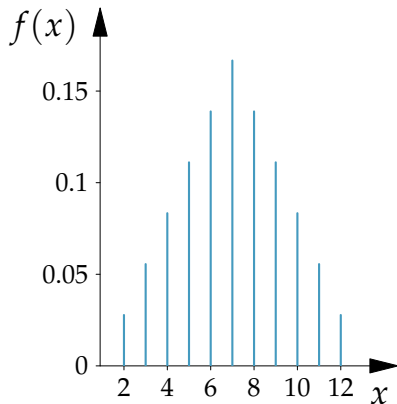


Abb.: Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable  $X$  = „Summe der Augenzahlen“ bei zweimaligem Würfeln



- Für die Zufallsvariable  $X$  mit der Verteilungsfunktion  $F(x)$  an den Stellen  $x = a$  und  $x = b$  gelten die folgenden Beziehungen:

$$P(X \leq a) = F(a)$$

$$P(X < a) = F(a) - P(X = a)$$

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - F(a) + P(X = a)$$



$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b)$$

- ▶ **Bernoulli-Experiment:** Zufallsexperiment mit einem dichotomen Ausgang
  - ▶ z. B. Münzwurf mit den Ergebnissen Kopf und Zahl
- ▶ **Bernoulli-Variable:** Zufallsvariable

$$X = \begin{cases} 1, & \text{falls das Ereignis } A \text{ eintritt} \\ 0, & \text{falls das Ereignis } A \text{ nicht eintritt} \end{cases}$$

mit dem Träger  $T = \{0, 1\}$

- ▶ Sei  $X$  eine Bernoulli-Variablen. Wenn  $P(A) = \pi$  gilt, so folgt:

$$P(X = 1) = \pi$$

$$P(X = 0) = 1 - \pi$$

- Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \pi & \text{für } x = 0 \\ \pi & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - \pi & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$



- ▶ **Bernoulli-Prozess:** Ein Bernoulli-Experiment wird  $n$ -mal ohne gegenseitige Beeinflussung wiederholt.
  - ▶ Bei jeder Wiederholung interessiert nur, ob ein bestimmtes Ereignis  $A$  eintritt oder nicht.
  - ▶ Die Wiederholungen sind unabhängig.
  - ▶ Die Erfolgswahrscheinlichkeit  $P(A) = \pi$  bleibt konstant.

- Zwei diskrete Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit den Trägern  $T_X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$  und  $T_Y = \{y_1, y_2, \dots, y_l, \dots\}$  heißen unabhängig, wenn für beliebige  $x \in T_X$  und  $y \in T_Y$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

gilt.



- ▶ Allgemeiner heißen  $n$  diskrete Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig, wenn für beliebige Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  aus den jeweiligen Trägern

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n) \end{aligned}$$

gilt.

- ▶ Eine diskrete Zufallsvariable  $X$  heißt **gleichverteilt** auf dem Träger  $T = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , wenn für alle  $i = 1, \dots, k$

$$P(X = x_i) = \frac{1}{k}$$

gilt.

- ▶ Jeder Ausgang des Zufallsexperiments tritt mit derselben Wahrscheinlichkeit auf.

- Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = \frac{1}{k}, & x = x_i \in \{x_1, \dots, x_k\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ \frac{1}{k} & \text{für } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{k-1}{k} & \text{für } x_{k-1} \leq x < x_k \\ 1 & \text{für } x \geq x_k \end{cases}$$

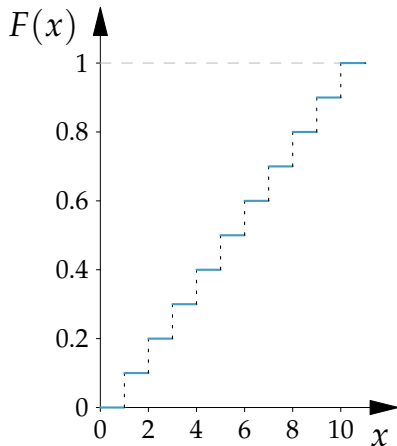
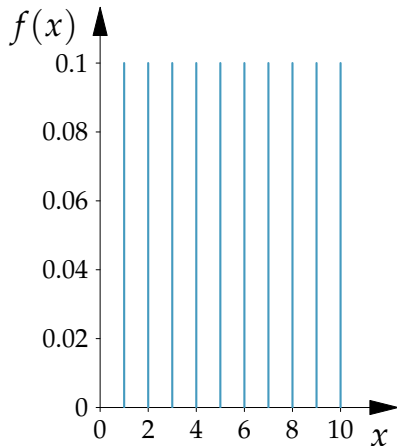


Abb.: Diskrete Gleichverteilung für  $k = 10$

- ▶ Beispiel: Bei einem Spiel wird mit einem Würfel wiederholt gewürfelt. Wie ist die Zufallsvariable

$X =$  „Anzahl der Würfe, bis zum  
ersten Mal eine Sechs fällt“

verteilt?

- ▶ Ein Bernoulli-Versuch werde bei gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten  $\pi = P(A)$  solange wiederholt, bis zum ersten Mal das interessierende Ereignis  $A$  eintritt. Dann heißt die Zufallsvariable

$X =$  „Anzahl der Versuche, bis zum ersten Mal  $A$  eintritt“

**geometrisch** verteilt mit dem Parameter  $\pi$ . Der Träger von  $X$  ist  $T = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ .

- ▶ Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist gegeben durch:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1 - \pi)^{x-1} \pi, & x \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - (1 - \pi)^x \end{aligned}$$

Der Graf von  $F$  erreicht für keinen endlichen  $x$ -Wert die 1, jedoch gilt  $F(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow +\infty$ .





- ▶ Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem fairen Würfel,
  - a) mit dem dritten Wurf zum ersten Mal eine Sechs zu würfeln?
  - b) innerhalb der ersten drei Würfe zum ersten Mal eine Sechs zu würfeln?
  - c) mehr als drei Würfe zu benötigen, um zum ersten Mal eine Sechs zu würfeln?



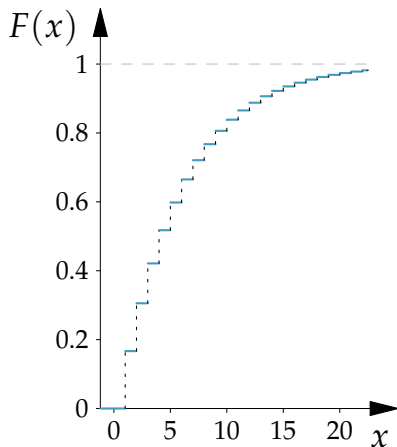
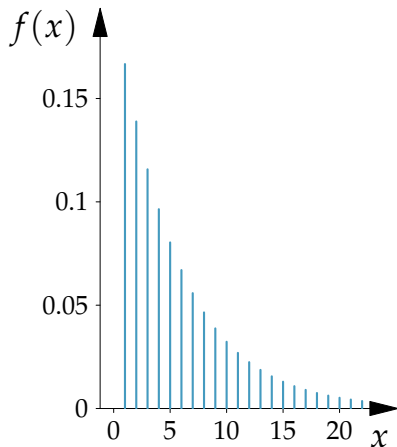


Abb.: Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung für  $\pi = 1/6$

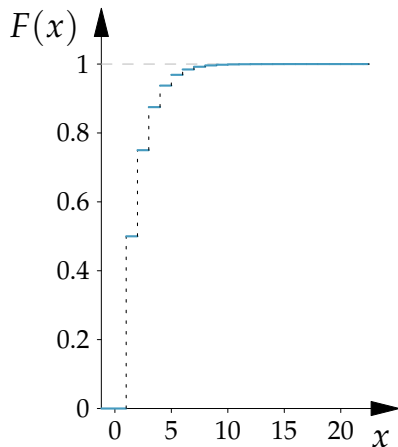
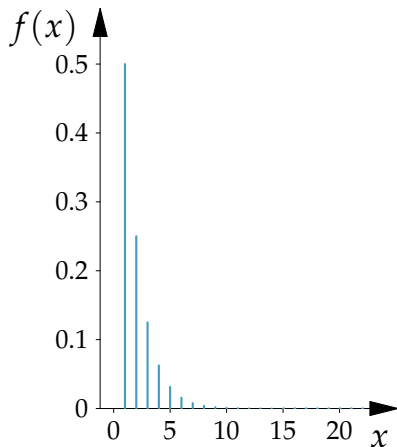


Abb.: Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung für  $\pi = 0.5$

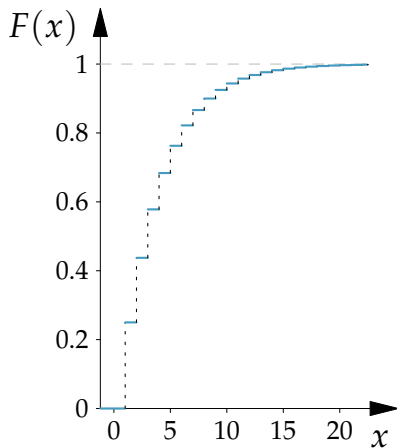
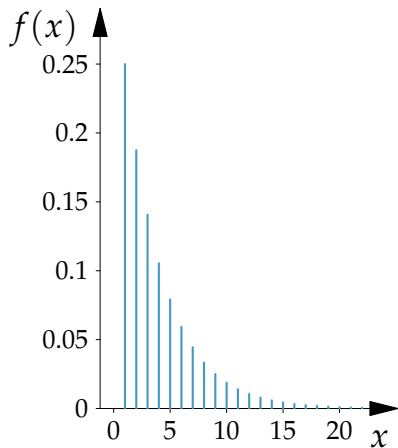


Abb.: Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung für  $\pi = 0.25$

- ▶ Wahrscheinlichkeitsmodell z. B. für
  - ▶ Lebensdauer eines Geräts in Tagen, bis es zum ersten Mal ausfällt
  - ▶ Dauer (in Wochen oder Monaten), bis ein bestimmter Kunde zum ersten Mal einen Versicherungsfall meldet
  - ▶ Dauer der Arbeitslosigkeit (in Wochen oder Monaten), bis jemand wieder erwerbstätig wird

- ▶ Verteilungen werden zur Modellierung von Zufallsvorgängen und zur Datenanalyse mittels induktiver Statistik eingesetzt.
- ▶ In der Regel gelingt es nur in einfachen Situationen und unter gewissen Idealisierungen zu zeigen, dass eine bestimmte Verteilung dem Sachverhalt exakt angepasst ist.
- ▶ Meistens lässt sich nur feststellen, auch mit Mitteln der Statistik, ob eine gewählte Verteilung dem Sachverhalt und den Daten gut oder schlecht angepasst ist.



- ▶ Größen zur Kennzeichnung der Verteilung, z. B.
  - ▶ Erwartungswert: Maßzahl für das Zentrum einer Verteilung
  - ▶ Varianz: Maßzahl für die Streuung einer Verteilung
  - ▶ ...

- ▶ Der **Erwartungswert**  $E(X)$  einer diskreten Zufallsvariable  $X$  mit den Werten  $x_1, \dots, x_k, \dots$  und der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p_1, \dots, p_k, \dots$  ist

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu = x_1 p_1 + \dots + x_k p_k + \dots \\ &= \sum_{i \geq 1} x_i p_i. \end{aligned}$$

- ▶  $E(X)$  ist ein mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  gewichtetes Mittel der möglichen Werte  $x_i$  von  $X$ .

- ▶ Mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  lässt sich  $E(X)$  in der äquivalenten Form

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= x_1 f(x_1) + \dots + x_k f(x_k) + \dots \\ &= \sum_{i \geq 1} x_i f(x_i) \end{aligned}$$

schreiben.

- ▶ Der Erwartungswert ist eine Eigenschaft der Verteilung, deshalb spricht man auch vom Erwartungswert einer Verteilung (statt einer Zufallsvariable).





- ▶ Erwartungswert  $E(X)$ :
  - ▶ Ist die Erwartung an das Ergebnis eines Zufallsexperiments mit Bezug auf den Wert der Zufallsvariable.
  - ▶ Der Erwartungswert gibt die Lage der Verteilung wieder, ohne dass das Experiment durchgeführt wird.
  - ▶ Es wird nur das potentielle Ergebnis eines Zufallsexperiments reflektiert.
- ▶ arith. Mittel  $\bar{x}$ : beschreibt den Schwerpunkt von erhobenen Daten

- ▶ Erwartungswert von symmetrischen Verteilungen
  - ▶ Ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  symmetrisch um  $c$ , so ist  $E(X) = c$ .
- ▶ Erwartungswert der Summe von Zufallsvariablen
  - ▶ Für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

- ▶ Allgemeiner gilt mit beliebigen Konstanten  $a_1, \dots, a_n$

$$E(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \dots \\ \dots + a_nE(X_n).$$





- ▶ Produktregel für unabhängige Zufallsvariablen
  - ▶ Für zwei unabhängige diskrete Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gilt

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

- ▶ Definition erfolgt in Analogie zu entsprechenden Definitionen für empirische Verteilungen (relative Häufigkeiten werden durch Wahrscheinlichkeiten ersetzt).
  - ▶ Modus
  - ▶ Median
  - ▶ Quantile

- ▶ Der Modus  $x_{\text{mod}}$  einer diskreten Zufallsvariable  $X$  ist ein Wert  $x$ , für den  $P(X = x)$  maximal wird.

- ▶ Der Wert  $x_p$  heißt  $p$ -Quantil der diskreten Zufallsvariable  $X$ , wenn

$$P(X \leq x_p) \geq p \quad \text{und} \quad P(X \geq x_p) \geq 1 - p$$

gilt. Für  $p = 0.5$  wird dieser auch als Median  $x_{\text{med}}$  bezeichnet.

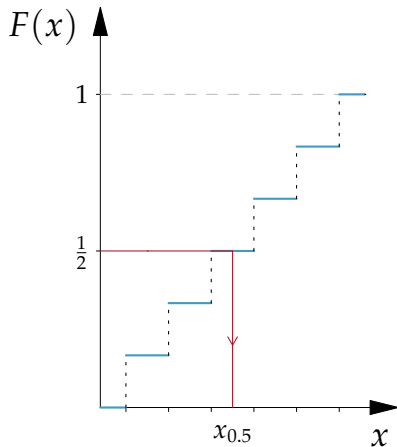
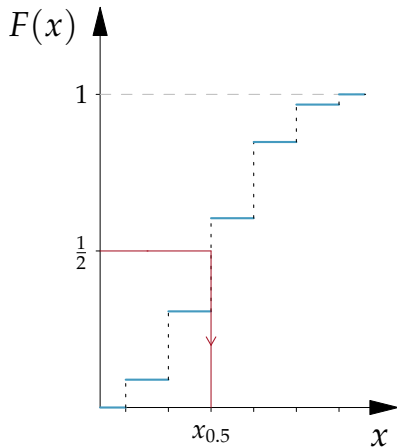


Abb.: Bestimmung des Medians  $x_{\text{med}}$  aus der Verteilungsfunktion

- ▶ Sind beides Maßzahlen für die zu erwartende Streuung in den Ergebnissen eines Zufallsexperiments.
- ▶ Die **Varianz** einer diskreten Zufallsvariable  $X$  ist

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) = \sigma^2 &= (x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_k - \mu)^2 p_k + \dots \\ &= \sum_{i \geq 1} (x_i - \mu)^2 f(x_i). \end{aligned}$$

- ▶ Die **Standardabweichung** ist

$$\sigma(X) = \sigma = +\sqrt{\text{Var}(X)}.$$



- ▶ Varianz der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen
  - ▶ Für unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bzw.  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y);$$

und mit beliebigen Konstanten  $a_1, \dots, a_n$

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \\ a_1^2 \text{Var}(X_1) + \dots + a_n^2 \text{Var}(X_n). \end{aligned}$$

► Bernoulli-Verteilung

$$E(X) = \pi, \quad \text{Var}(X) = \pi(1 - \pi)$$

► diskrete Gleichverteilung

$$E(X) = \frac{k+1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{k^2-1}{12}$$

► geometrische Verteilung

$$E(X) = \frac{1}{\pi}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-\pi}{\pi^2}$$