



- ▶ Beispiel: Bei einem Spiel wird mit einem Würfel wiederholt gewürfelt. Wie ist die Zufallsvariable

$X =$  „Anzahl 6-er bei  $n$ -maligem Würfeln“

verteilt?



- ▶ Ein Bernoulli-Versuch werde  $n$ -mal wiederholt mit  $\pi = P(A)$  für das interessierende Ereignis  $A$ . Dann heißt die Zufallsvariable

$X =$  „Anzahl der eingetretenen Ereignisse  $A$  bei  $n$  Wiederholungen“

**binomialverteilt** mit den Parametern  $n$  und  $\pi$ . Der Träger von  $X$  ist  $T = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .





- ▶ Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Das Produkt über alle Zahlen  $1, \dots, n$  wird geschrieben als

$$n! = \prod_{i=1}^n i.$$

Ergänzend definiert man:  $0! = 1$

- ▶ Die Anzahl der Möglichkeiten,  $k$  Elemente aus  $n$  Elementen ( $k, n \in \mathbb{N}$ ) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen, beträgt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

- ▶ Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}, & x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F(x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}$$

- ▶ Es gilt:

$$E(X) = n\pi, \quad \text{Var}(X) = n\pi(1 - \pi)$$



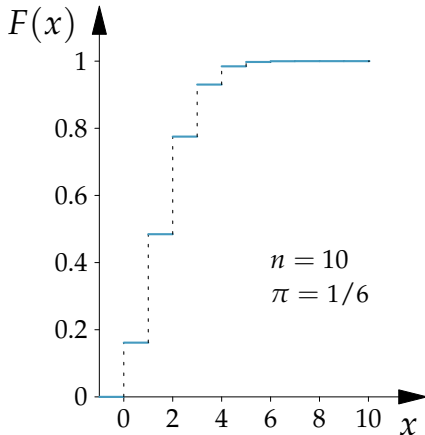
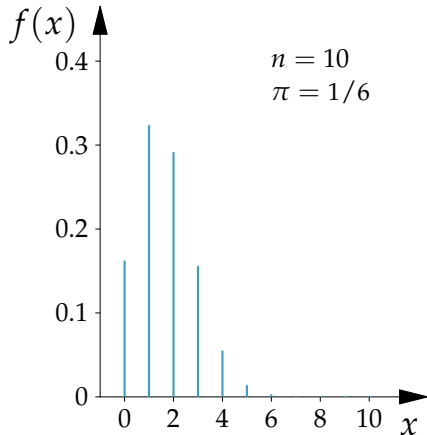


Abb.: Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable  $X$  = „Anzahl der Sechser“ bei zehnmaligem Werfen eines Würfels

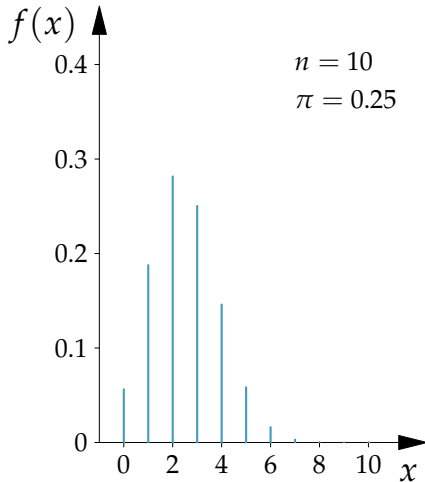
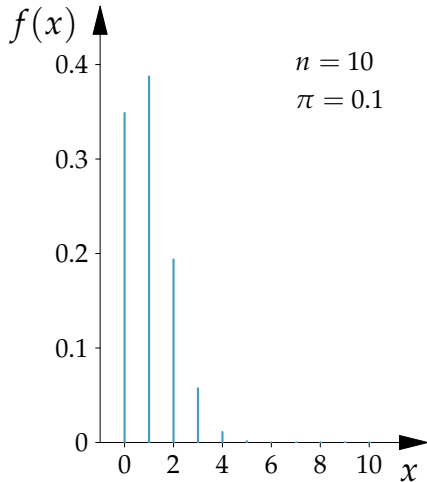


Abb.: Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $\pi$

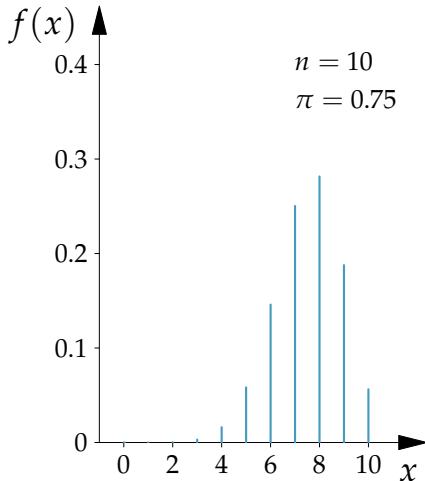
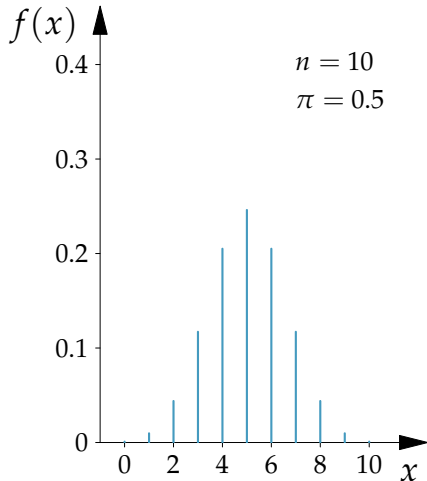
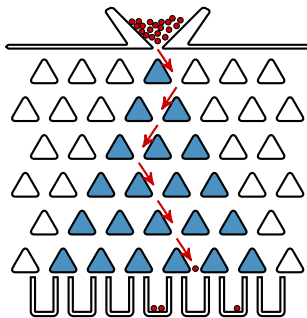


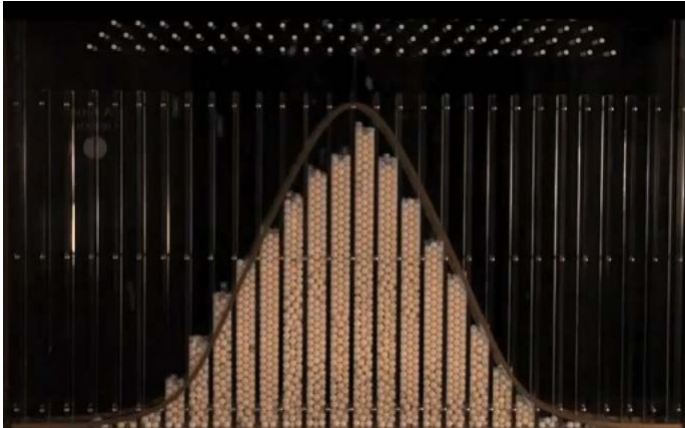
Abb.: Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $\pi$

- ▶ Für  $\pi < 0.5$  ist die Verteilung linkssteil.
- ▶ Für  $\pi = 0.5$  ist die Verteilung symmetrisch zum Wert  $x = n\pi$ .
- ▶ Für  $\pi > 0.5$  ist die Verteilung rechtssteil.

- ▶ Ein Galtonbrett ist ein mechanisches Modell zur Veranschaulichung der Binomialverteilung.



- ▶ Jedes Aufprallen einer Kugel auf eines der Hindernisse ist ein Bernoulli-Versuch. Die beiden möglichen Ausgänge sind „Kugel fällt nach links“ ( $\{X = 0\}$ ) und „Kugel fällt nach rechts“ ( $\{X = 1\}$ ).



<https://www.youtube.com/watch?v=9xUBhhM4vbM>

- ▶ Das Galtonbrett simuliert ein physikalisches Messgerät, dessen Messwert verrauscht ist.
- ▶ Die horizontale Position der Kugel ist dabei der zu messende Wert, der am oberen Eingang noch exakt vorliegt, während er unten in einem der Fächer durch ein Rauschsignal verändert wurde.
- ▶ Die Hindernisse symbolisieren kleine Störungen, die den Messwert positiv oder negativ beeinflussen können.
- ▶ Die Füllhöhen der Fächer geben am Ende Auskunft über die Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Stärken der aufsummierten Störungen.

- ▶ Geometrisch verteilte Zufallsvariablen zählen, **wie lange** man warten muss, bis ein bestimmtes Ereignis  $A$  **zum ersten Mal** eintritt (Wertebereich:  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ).
- ▶ Binomialverteilte Zufallsvariablen zählen, **wie oft** bei  $n$  **Versuchen** ein bestimmtes Ereignis  $A$  eintritt (Wertebereich:  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ).

## 6. Stetige Zufallsvariablen und Verteilungen



- ▶ diskrete Zufallsvariable: Als Werte der Zufallsvariable treten nur ganze Zahlen auf.
- ▶ stetige Zufallsvariable: Auch Zwischenwerte in einem Intervall  $[a, b]$  sind möglich.

- ▶ Eine Zufallsvariable  $X$  heißt stetig, wenn es eine Funktion  $f(x) \geq 0$  gibt, so dass für jedes Intervall  $[a, b]$

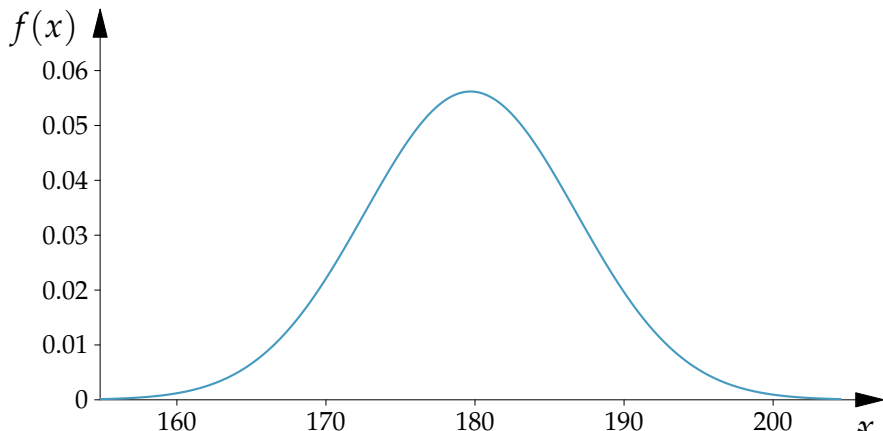
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

gilt. Die Funktion  $f(x)$  heißt

**Wahrscheinlichkeitsdichte** (kurz **Dichte** oder **Dichtefunktion**) von  $X$ . Der Träger  $T$  von  $X$  ist die Menge aller Elemente  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $f(x) > 0$  gilt.

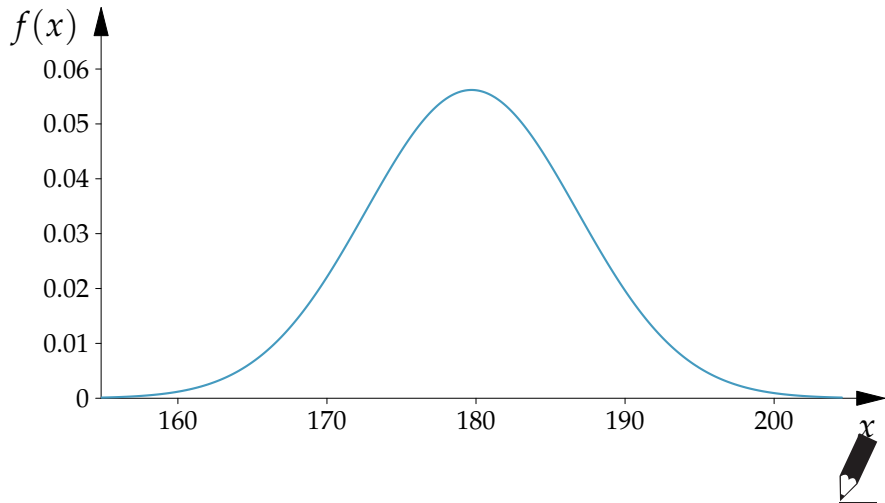


- Wahrscheinlichkeit für eine Körpergröße kleiner oder gleich 179.7 cm?





- Wahrscheinlichkeit für eine Körpergröße zwischen 170 cm und 190 cm?



- ▶ Die Dichtefunktion dient der Visualisierung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- ▶ Eine Fläche unter der Dichtefunktion entspricht einer Wahrscheinlichkeit.

- Für stetige Zufallsvariablen  $X$  gilt

$$\begin{aligned}P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X < b)\end{aligned}$$

und

$$P(X = x) = 0$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

- ▶ Es gilt

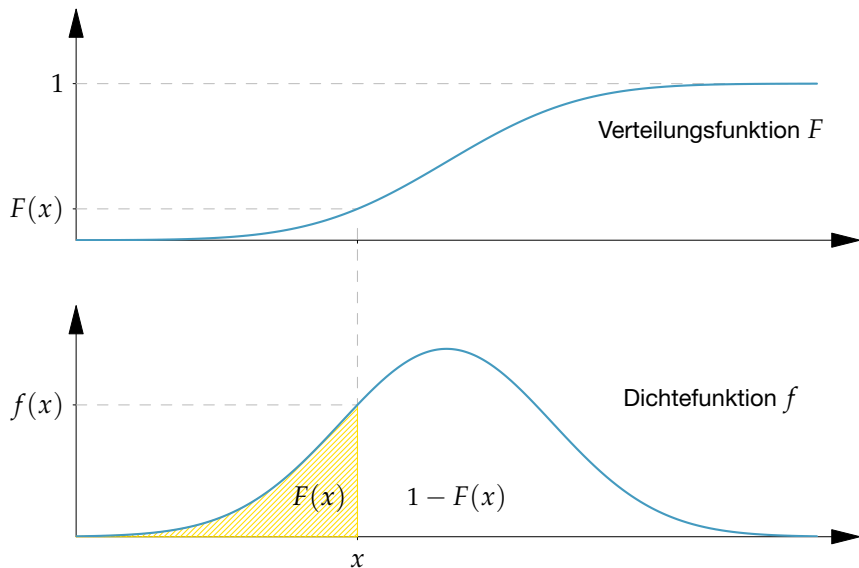
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

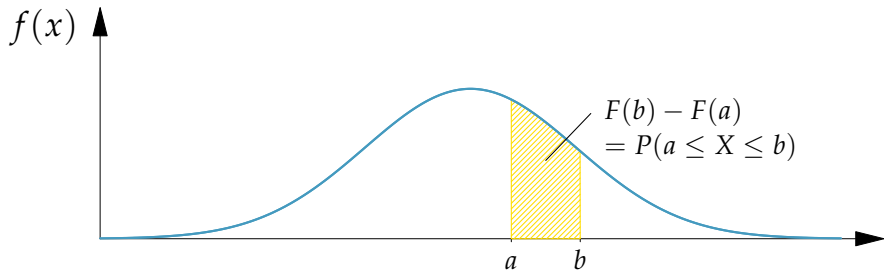
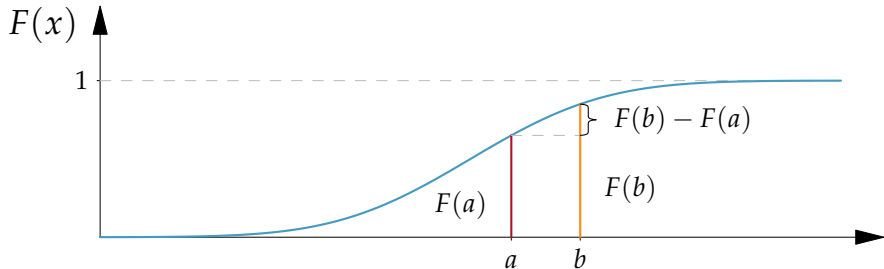
d. h. die Gesamtfläche zwischen  $x$ -Achse und der Dichte  $f(x)$  ist gleich 1.

- ▶ Die **Verteilungsfunktion** einer stetigen Zufallsvariable ist das unbestimmte Integral der Dichte.
- ▶ Es gilt

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- ▶ Die Verteilungsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable  $X$  (diskret oder stetig) einen Wert kleiner oder gleich  $x$  annimmt.







- ▶  $F(x)$  ist stetig und monoton wachsend mit Werten im Intervall  $[0, 1]$ .
- ▶ Für die Grenzen gilt:

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

- ▶ Für Werte von  $x$ , an denen  $f(x)$  stetig ist, gilt

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

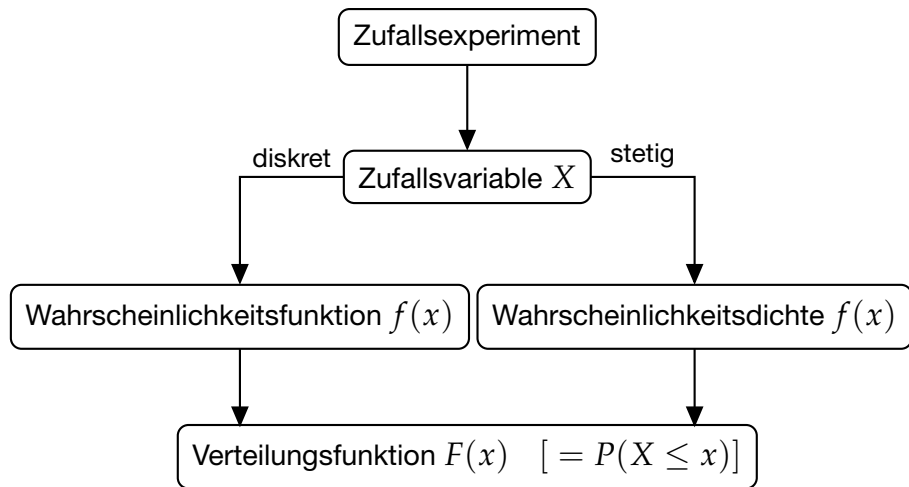
d. h. die Dichte ist die Ableitung der Verteilungsfunktion.

- ▶ Für Intervalle erhält man

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

und

$$P(X > a) = 1 - F(a).$$



- ▶ Eine stetig Zufallsvariable  $X$  heißt **gleichverteilt** auf dem auf dem Intervall  $[a, b]$ , wenn ihre Dichtefunktion die Form

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat.

- ▶ Die Verteilungsfunktion  $F(x)$  von  $X$  ergibt sich zu:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$



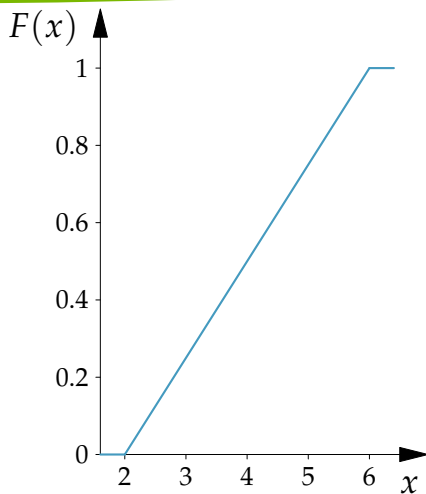
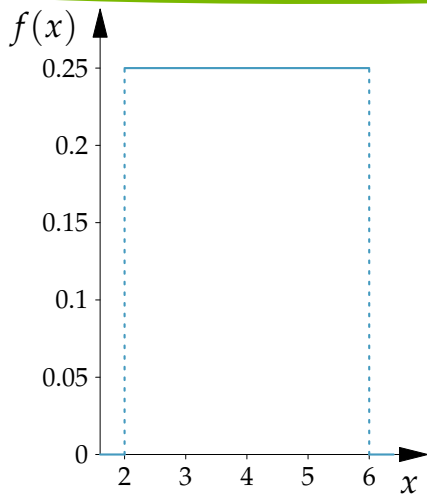


Abb.: Dichtefunktion und Verteilungsfunktion der stetigen Gleichverteilung für  $a = 2$  und  $b = 6$

- ▶ Wahrscheinlichkeitsmodell z. B. für
  - ▶ zufällige Ankunftszeit innerhalb eines Zeitintervalls (z. B. zwischen 8:00 und 9:00 Uhr)
  - ▶ zufällige Position auf einer Strecke (z. B. Punkt auf einer 1 m langen Linie)
  - ▶ gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall  $[0, 1]$