

- ▶ Eine stetige Zufallsvariable X mit nichtnegativen Werten heißt **exponentialverteilt** mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt. Die zugehörige Verteilung heißt Exponentialverteilung mit Parameter λ .

- ▶ Der Parameter λ steuert, wie schnell die Exponentialfunktion für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

- ▶ Die Verteilungsfunktion ergibt sich durch Integration zu:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Bsp. Exponentialverteilung (1)

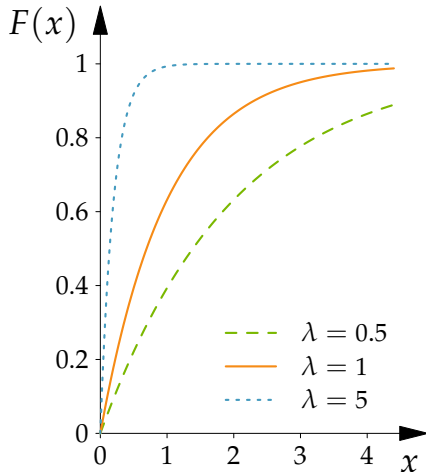
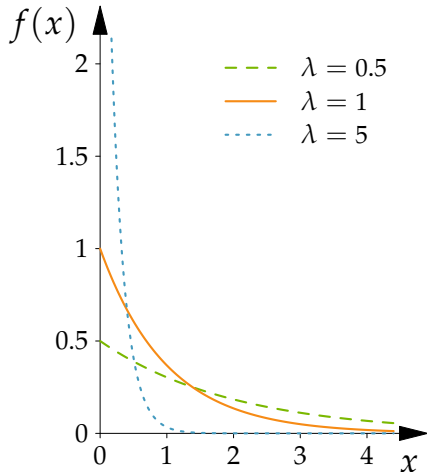


Abb.: Wahrscheinlichkeitsdichten und Verteilungsfunktionen der Exponentialverteilung mit Parameter λ

- ▶ Wahrscheinlichkeitsmodell z. B. für
 - ▶ Wartezeiten zwischen Anrufen in einem Callcenter
 - ▶ Lebensdauer eines elektronischen Bauteils ohne Alterungseffekt
 - ▶ Zeit bis zum nächsten Kunden in einem Geschäft
 - ▶ Zeit bis zum Zerfall eines radioaktiven Atoms

- ▶ Die Lebensdauer X einer speziellen Sorte von Glühbirnen sei exponentialverteilt, wobei die durchschnittliche Lebensdauer mit 100 Stunden (d. h. $\lambda = 0.01$) angegeben wird.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer mehr als 100 Stunden beträgt?



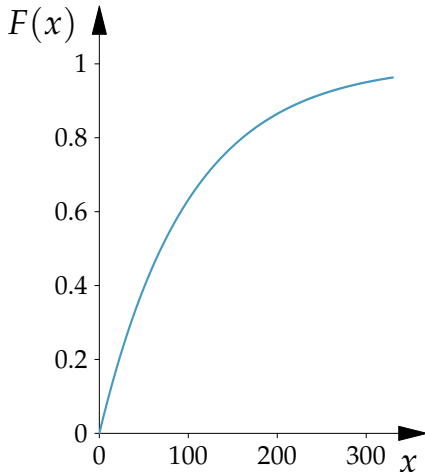
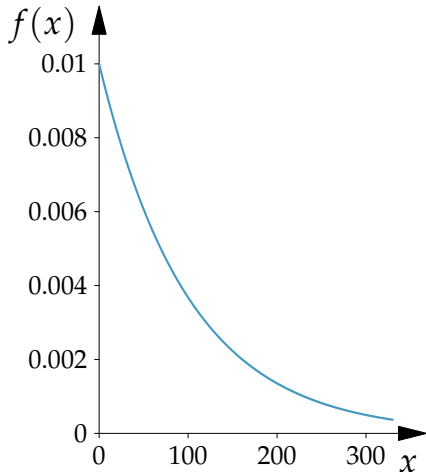


Abb.: Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit $\lambda = 0.01$



- ▶ Der **Erwartungswert** $E(X)$ einer stetigen Zufallsvariable X mit Dichte $f(x)$ ist

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

- ▶ Interpretationen und Eigenschaften gelten wie im diskreten Fall.
- ▶ Für symmetrische Verteilungen gilt:
Ist die Dichte $f(x)$ symmetrisch um den Punkt c , d. h. ist $f(c - x) = f(x + c)$ für alle x , so ist

$$E(X) = c.$$



- ▶ Die **Varianz** $Var(X)$ einer stetigen Zufallsvariable X mit Dichte $f(x)$ ist

$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

mit $\mu = E(X)$.

- ▶ Die Standardabweichung ist

$$\sigma(X) = \sigma = +\sqrt{Var(X)}.$$

- ▶ Interpretationen und Eigenschaften gelten wie im diskreten Fall.

- ▶ stetige Gleichverteilung

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

- ▶ Exponentialverteilung

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- ▶ Jeder x -Wert, für den $f(x)$ ein Maximum besitzt, ist Modus, kurz x_{mod} .
- ▶ Falls das Maximum eindeutig ist und $f(x)$ keine weiteren lokalen Maxima besitzt, heißt $f(x)$ unimodal.
- ▶ Existieren zwei oder mehrere (lokale) Maxima, heißt $f(x)$ bimodal oder multimodal.

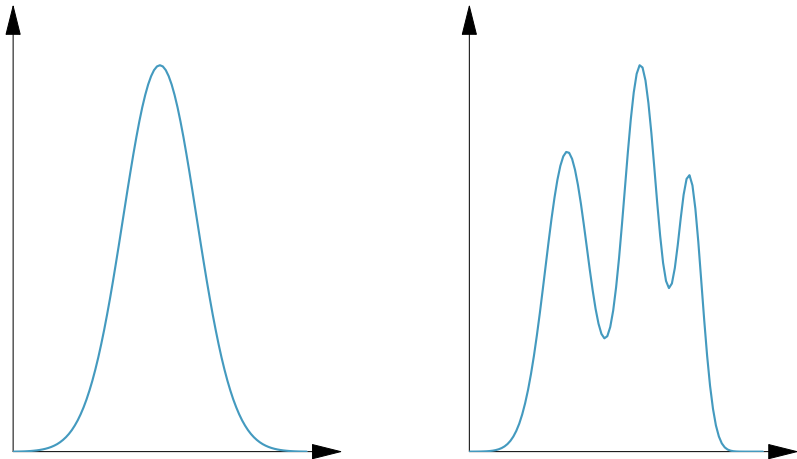


Abb.: Uni- und multimodale Dichten

- ▶ Für $0 < p < 1$ ist das p -Quantil x_p die Zahl auf der x -Achse, für die

$$F(x_p) = p$$

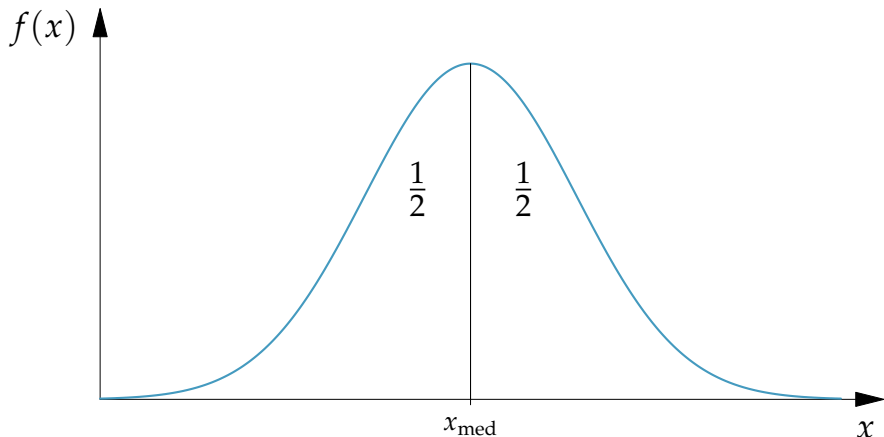
gilt.

- ▶ Der Median x_{med} ist das 50 %-Quantil, es gilt also

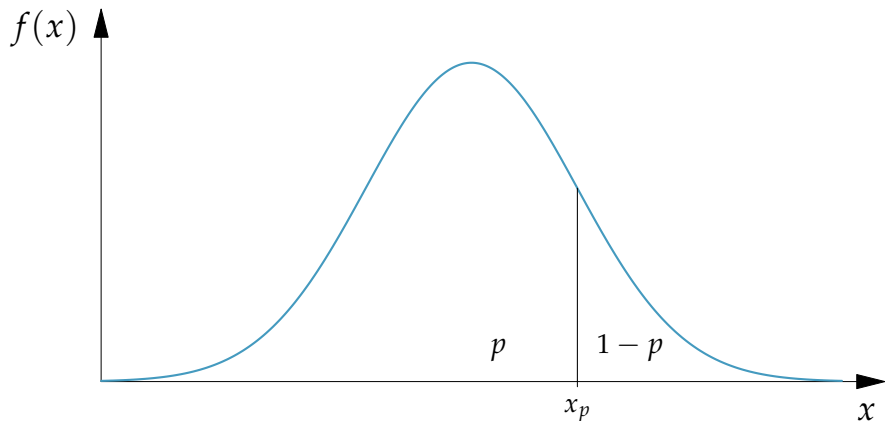
$$F(x_{\text{med}}) = \frac{1}{2}.$$

- ▶ Für streng monotone Verteilungsfunktionen $F(x)$ sind p -Quantil und Median eindeutig bestimmt.

- Der Median teilt die Fläche 1 unter der Dichte in zwei gleich große Teilflächen.



- Das p -Quantil teilt die Gesamtfläche unter $f(x)$ auf in eine Teilfläche der Größe p links von x_p und eine Teilfläche der Größe $1 - p$ rechts von x_p .



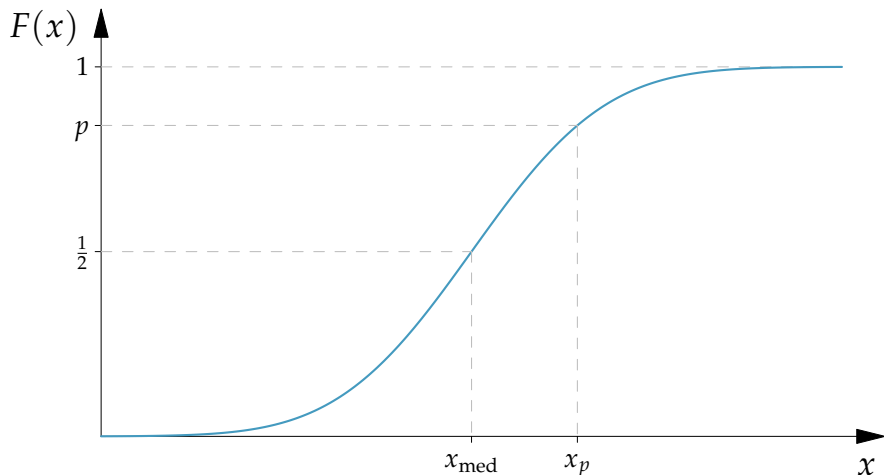


Abb.: Verteilungsfunktion, Median und p -Quantil

- ▶ Die Lebensdauer X einer speziellen Sorte von Glühbirnen sei exponentialverteilt, wobei die durchschnittliche Lebensdauer mit 100 Stunden (d. h. $\lambda = 0.01$) angegeben wird.

Wie lautet der Median der Lebensdauer?



Bsp. Exponentialverteilung (4)

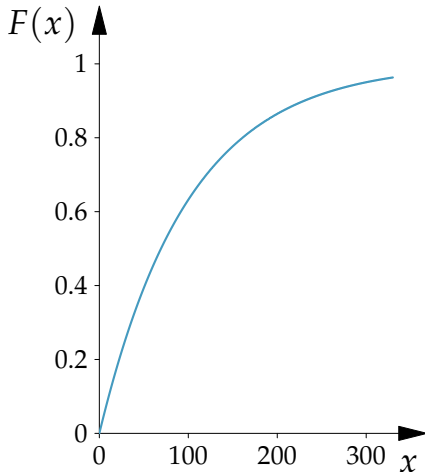
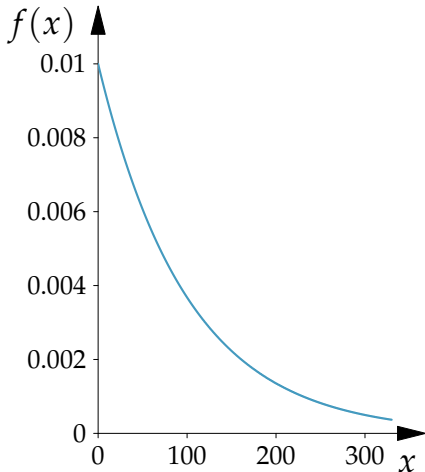


Abb.: Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit $\lambda = 0.01$





- ▶ Die Summe von vielen unabhängigen, beliebig verteilten Zufallsvariablen gleicher Größenordnung ist angenähert **normalverteilt**.
- ▶ Ein gutes Modell für die Verteilung einer Variablen X , wenn diese durch das Zusammenwirken einer größeren Zahl von zufälligen Einflüssen entsteht.

- ▶ Wahrscheinlichkeitsmodell z. B. für
 - ▶ Messfehler bei physikalischen Experimenten
 - ▶ Körpergrößen oder Gewicht in einer Population
 - ▶ Abweichungen von einem Sollwert in der Produktion
 - ▶ Prüfungsergebnisse bei großer Teilnehmerzahl

- ▶ Quarks & Co: Die Wissenschaft vom Zufall – Normalverteilung



<http://www.youtube.com/watch?v=QrhIFlt07PU>

- ▶ Eine Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, kurz $X \sim N(\mu, \sigma)$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt.

- ▶ Die Normalverteilung wird auch als *Gauß-Verteilung* bezeichnet.
- ▶ Es gilt

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Bsp. Dichten von Normalverteilungen (1)

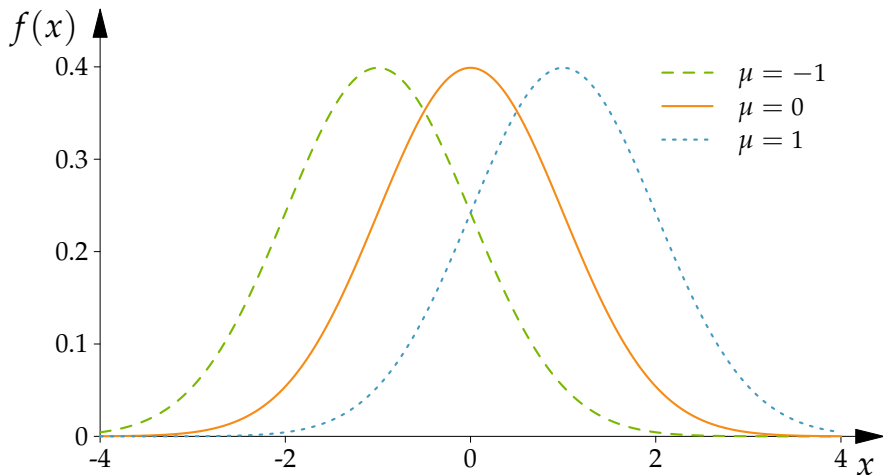


Abb.: Dichten von Normalverteilungen für unterschiedliche μ und festes $\sigma = 1$

Bsp. Dichten von Normalverteilungen (2)

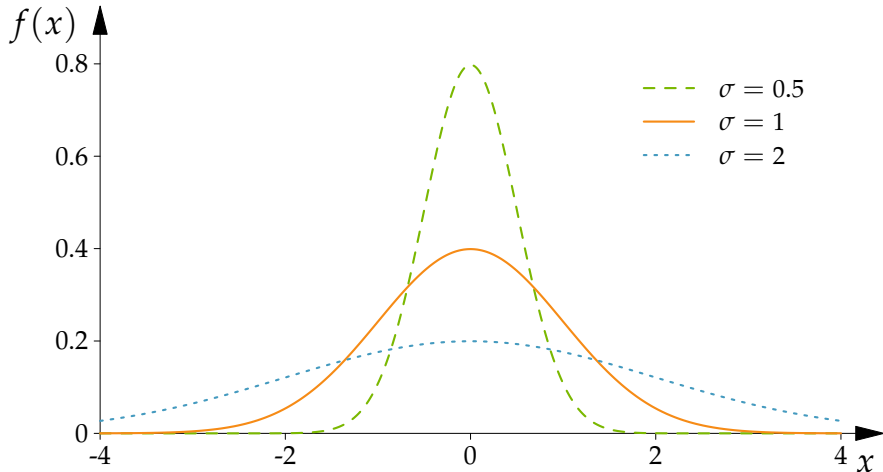


Abb.: Dichten von Normalverteilungen für festes $\mu = 0$ und unterschiedliche σ



- ▶ Die Normalverteilung wird durch die Parameter μ und σ vollständig charakterisiert.
- ▶ Erwartungswert μ bestimmt die Lage der Verteilung im Hinblick auf die x -Achse.
- ▶ Standardabweichung σ bestimmt die Form der Kurve. Je größer σ ist, um so flacher ist der Kurvenverlauf, um so breiter ist die Kurve und um so niedriger liegt das Maximum.



- Speziell für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ erhält man die **Standardnormalverteilung** $N(0, 1)$ mit der Dichte

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} .$$

- ▶ Die Verteilungsfunktion ist definitionsgemäß durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

gegeben.

- ▶ Die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standardnormalverteilung ergibt sich als

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

- ▶ Beide Integrale lassen sich nicht analytisch berechnen.

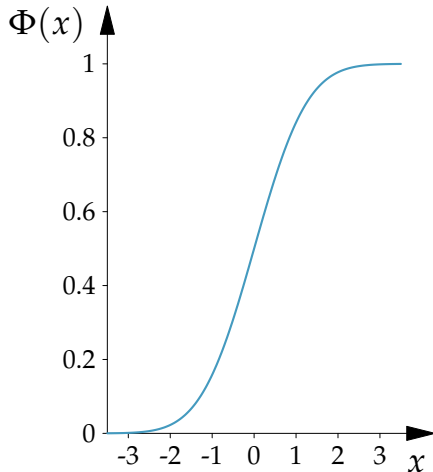
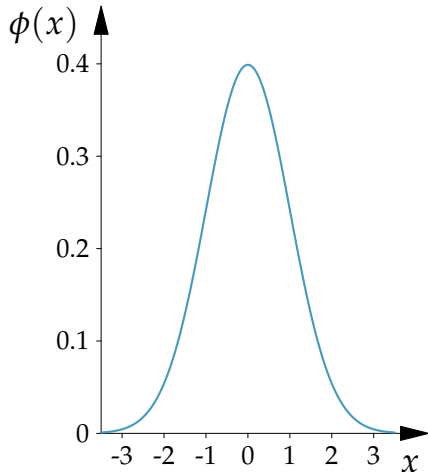


Abb.: Dichte- und Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung



- ▶ Die Dichte ist symmetrisch zu μ , d. h. es gilt $f(\mu - x) = f(\mu + x), x \in \mathbb{R}$.
- ▶ Die Standardabweichung ist durch die x -Werte der Wendepunkte der Dichte gegeben.
- ▶ Rund $2/3$ aller Beobachtungen liegen zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$.
- ▶ Die Dichte $f(x)$ ist für jede reelle Zahl definiert und größer als 0.
- ▶ Für $x \rightarrow \pm\infty$ nähert $f(x)$ sich asymptotisch der x -Achse.

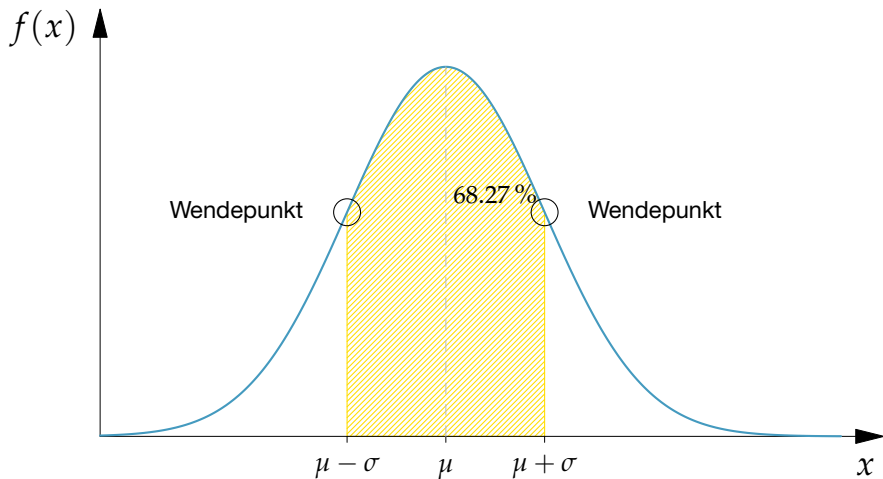


Abb.: Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung mit Wendepunkten

- ▶ Der Nüchternblutzucker X (in mg/dl) sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu = 90$ mg/dl und der Standardabweichung $\sigma = 10$ mg/dl.

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Nüchternblutzucker

- a) unter 75 mg/dl oder
 - b) zwischen 85 mg/dl und 105 mg/dl
- liegt?

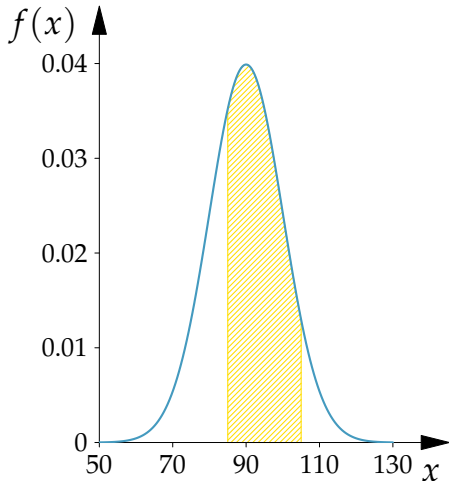
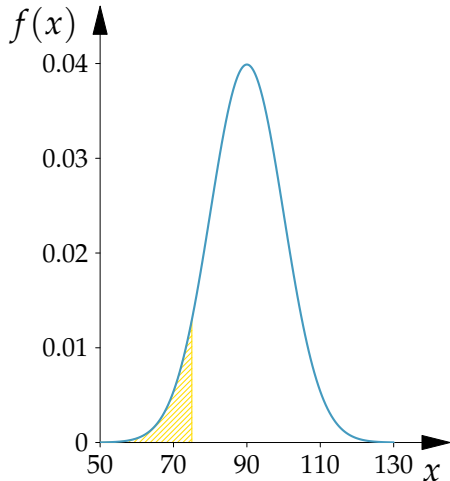


Abb.: Wahrscheinlichkeiten (Flächen) zum Beispiel
Nüchternblutzucker

- Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Person der gemessene Wert unter 75 mg/dl liegen wird ($X \sim N(90, 10)$):

$$P(X < 75) = F(75) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{75} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-90}{10}\right)^2} dt$$



```
# Dichtefunktion der Normalverteilung
# mit Erwartungswert 90 und
# Standardabweichung 10
f.norm <- function(x, mu = 90, sigma = 10) {
  1 / (sigma * sqrt(2 * pi)) *
    exp(-0.5 * ((x - mu) / sigma)^2)
}

# numerische Integration
integrate(f = f.norm, lower = -Inf, upper = 75)
0.0668072 with absolute error < 1.2e-06
```

- ▶ Problem: Es existieren beliebig viele unterschiedliche Normalverteilungen, deren Verteilungsfunktionen jedoch nicht analytisch lösbar sind.
- ▶ Idee: Standardisiere durch Transformation!
- ▶ Ist X eine $N(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsvariable, so ist die **standardisierte Zufallsvariable**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt, d. h. $Z \sim N(0, 1)$.

- ▶ X ist dimensionsbehaftet, Z ist dimensionslos.

- ▶ Die Verteilungsfunktion F einer $N(\mu, \sigma)$ -verteilten ZV lässt sich durch die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung ausdrücken:

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(z) \text{ mit } z = \frac{x - \mu}{\sigma} \end{aligned}$$

- ▶ Der Nüchternblutzucker X (in mg/dl) sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu = 90$ mg/dl und der Standardabweichung $\sigma = 10$ mg/dl.

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Nüchternblutzucker

- a) unter 75 mg/dl oder
 - b) zwischen 85 mg/dl und 105 mg/dl
- liegt?



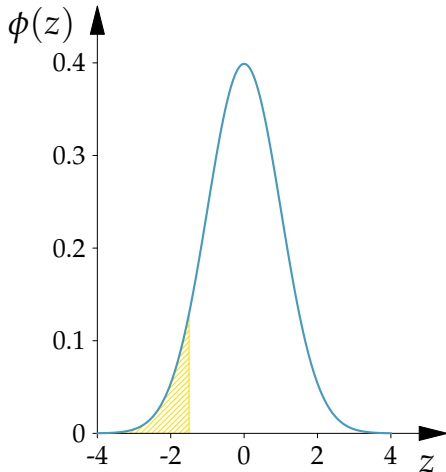
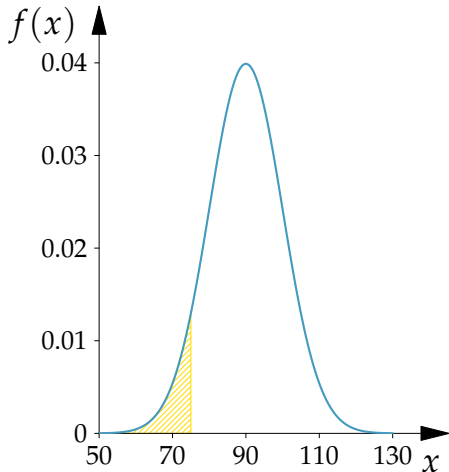


Abb.: Dichte der Normal- und der Standardnormalverteilung zusammen mit der Wahrscheinlichkeit $P(X < 75)$ (gelb)

Tabelle der $N(0, 1)$ -Verteilung



A Standardnormalverteilung

Tabelliert sind die Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ für $z \geq 0$.

Ablesebeispiel: $\Phi(1.75) = 0.9599$

Funktionswerte für negative Argumente: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Die z -Quantile ergeben sich genau umgekehrt. Beispielsweise ist $z(0.9599) = 1.75$ und $z(0.9750) = 1.96$.

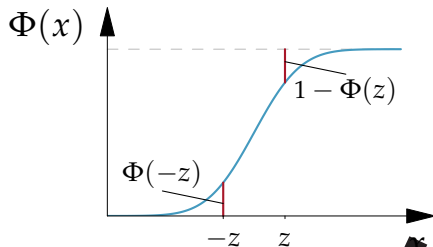
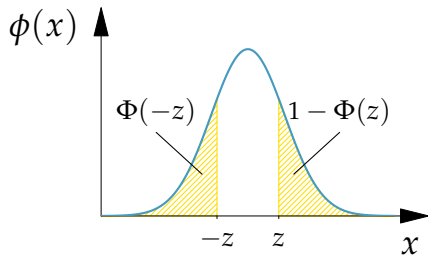
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Abb.: $N(0, 1)$ -Verteilung (Aus: Fahrmeir u. a. 2016)



- Die Symmetrie der Standardnormalverteilung führt zu:

$$\begin{aligned}\Phi(-z) &= P(Z \leq -z) \\ &= P(Z \geq z) \\ &= 1 - P(Z \leq z) \\ &= 1 - \Phi(z)\end{aligned}$$



- ▶ Quantile z_p der Standardnormalverteilung sind bestimmt durch

$$\Phi(z_p) = p, \quad 0 < p < 1.$$

- ▶ Das p -Quantil z_p teilt die Fläche unter der Dichte $\phi(z)$ in eine Fläche mit Inhalt p links von z_p und eine Fläche mit Inhalt $1 - p$ rechts davon auf.
- ▶ Wegen der Symmetrie gilt

$$z_p = -z_{1-p}.$$

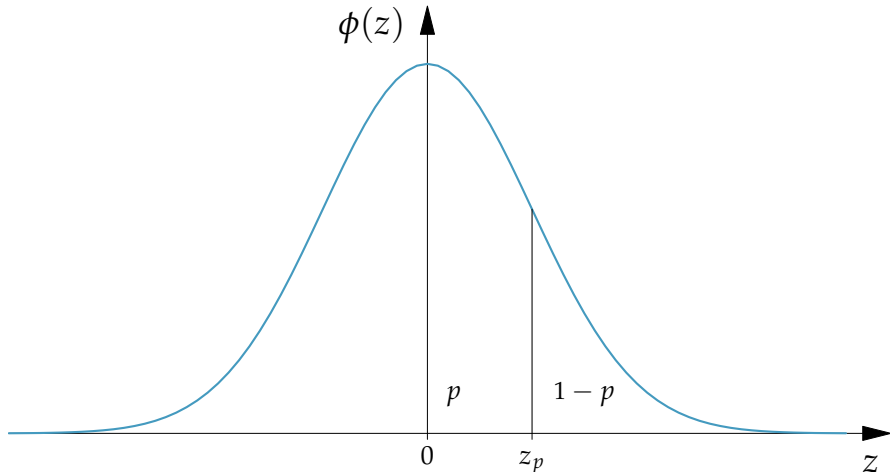
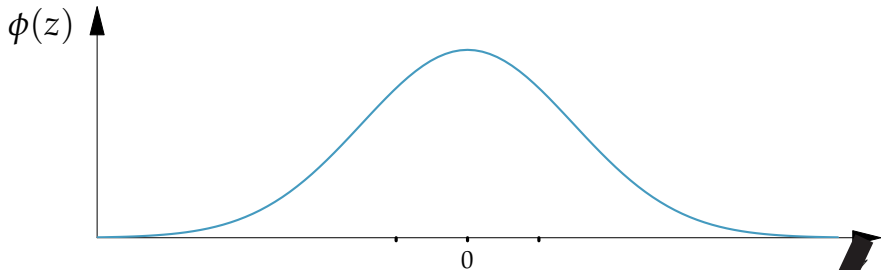
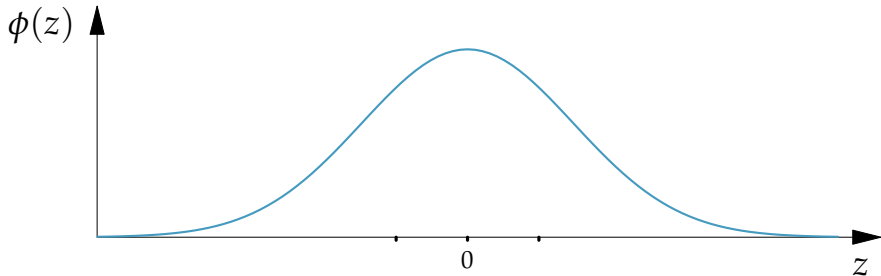


Abb.: p -Quantil z_p der Standardnormalverteilung



- ▶ wichtige Quantile der Standardnormalverteilung

p	50 %	75 %	90 %	95 %	97.5 %	99 %
z_p	0.0	0.67	1.28	1.64	1.96	2.33

- ▶ Zusammenhang zwischen den Quantilen x_p einer $N(\mu, \sigma)$ -Verteilung und den Quantilen z_p der $N(0, 1)$ -Verteilung:

$$z_p = \frac{x_p - \mu}{\sigma}$$

bzw.

$$x_p = \mu + z_p \cdot \sigma$$



Tabelle der $N(0, 1)$ -Verteilung



A Standardnormalverteilung

Tabelliert sind die Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ für $z \geq 0$.

Ablesebeispiel: $\Phi(1.75) = 0.9599$

Funktionswerte für negative Argumente: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Die z -Quantile ergeben sich genau umgekehrt. Beispielsweise ist $z(0.9599) = 1.75$ und $z(0.9750) = 1.96$.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Abb.: $N(0, 1)$ -Verteilung (Aus: Fahrmeir u. a. 2016)

- Berechnung in R :

```
qnorm(p = 0.06, mean = 150, sd = 10)  
[1] 134.45
```