

- ▶ zweiseitiges Testproblem

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- ▶ einseitige Testprobleme

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

bzw.

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

- ▶ zweiseitiges Testproblem

$$H_0 : \mu = 17 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq 17$$

- ▶ einseitige Testprobleme

$$H_0 : \mu \geq 17 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < 17$$

oder

$$H_0 : \mu \leq 17 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > 17$$

- ▶ Ein hypothetischer Erwartungswert μ_0 soll verglichen werden mit dem tatsächlichen, unbekanntem Erwartungswert $\mu = E(X)$.
- ▶ Annahmen: X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ bekannt, bzw. beliebig verteilt bei $n > 30$
- ▶ Hypothesen:
 - a) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$
 - b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$
 - c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

- ▶ Prüfgröße/Testfunktion: $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$
- ▶ Verteilung von Z unter H_0 : $N(0, 1)$
- ▶ Ablehnung von H_0 , falls
 - a) $|Z| > z_{1-\alpha/2}$
 - b) $Z < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$
 - c) $Z > z_{1-\alpha}$,

wobei z_p das p -Quantil der $N(0, 1)$ -Verteilung bezeichnet.



- ▶ **Fehler 1. Art** (α -Fehler): Nullhypothese ist richtig, wird aber zugunsten der Alternativhypothese verworfen.
- ▶ **Fehler 2. Art** (β -Fehler): Alternativhypothese ist richtig, Nullhypothese wird aber nicht verworfen.

Wirklichkeit	Entscheidung für	
	H_0	H_1
H_0 wahr	richtig	falsch Fehler 1. Art (α -Fehler)
H_1 wahr	falsch Fehler 2. Art (β -Fehler)	richtig

- ▶ Hypothesen bei Gericht:
 - ▶ Nullhypothese H_0 : „Der Angeklagte ist unschuldig.“
 - ▶ Alternative H_1 : „Der Angeklagte ist schuldig.“
- ▶ mögliche Fehlentscheidungen:
 - ▶ Fehler 1. Art: Ein Unschuldiger wird verurteilt.
 - ▶ Fehler 2. Art: Ein Schuldiger wird nicht verurteilt.
- ▶ Frage:
 - ▶ Wie hoch darf die Wahrscheinlichkeit maximal sein, dass ein Unschuldiger verurteilt wird?

- ▶ Ein statistischer Test heißt **Signifikanztest zum Niveau α** , $0 < \alpha < 1$, falls

$$P(H_1 \text{ annehmen} \mid H_0 \text{ wahr}) \leq \alpha,$$

d. h.

$$P(\text{Fehler 1. Art}) \leq \alpha.$$

- ▶ Typische Werte für α sind 0.1, 0.05, 0.01 .
- ▶ Signifikanztests dienen als Sicherheitsmaßnahme!

- ▶ Die simultanen Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art und 2. Art verhalten sich gegenläufig, es ist also nicht möglich, beide gleichzeitig zu minimieren.

Bsp. Zusammenhang Fehlerarten (1)



► Testproblem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$

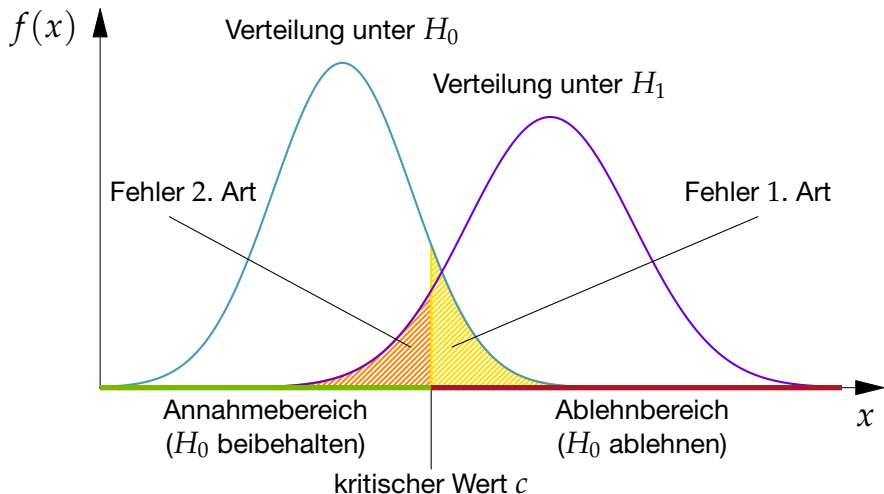


Abb.: Fehler 1. und 2. Art

Bsp. Zusammenhang Fehlerarten (2)



► Testproblem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$

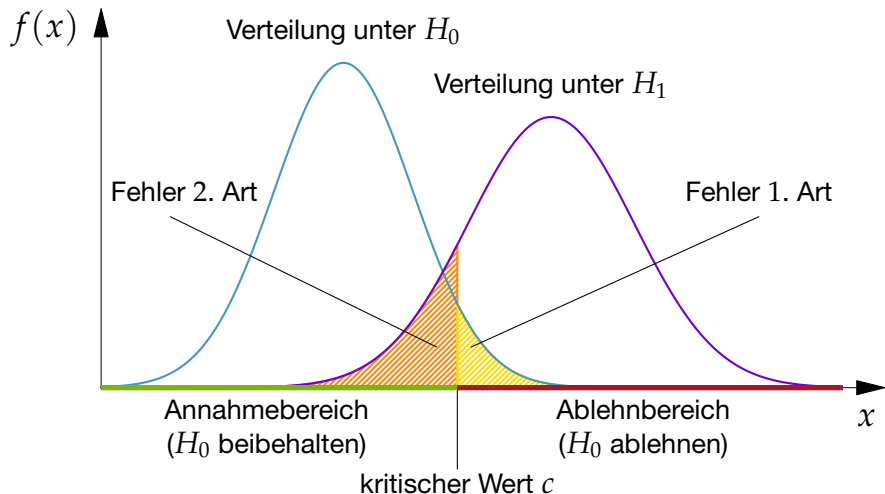


Abb.: Fehler 1. und 2. Art

- ▶ Kontrolle des Fehlers 1. Art durch Festlegung der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit α
- ▶ Kontrolle des Fehlers 2. Art
 - ▶ Wahrscheinlichkeitsaussagen sind nicht möglich.
 - ▶ Der Fehler wird beeinflusst durch:
 - ▶ Ausmaß der tatsächlichen Abweichung von der Nullhypothese
 - ▶ Stichprobenumfang
 - ▶ Streuung der Daten
 - ▶ Wahl der statistischen Testprozedur

Bsp. Fehler 2. Art (1)



► Testproblem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$

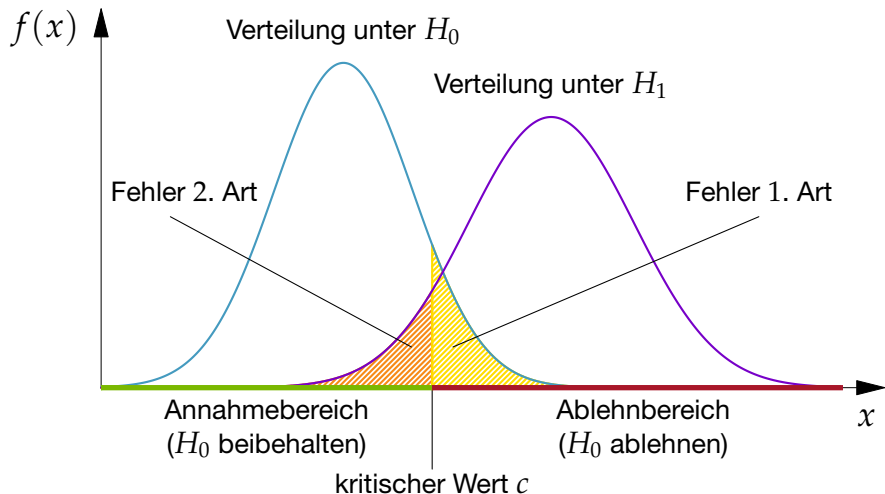


Abb.: Fehler 2. Art

Bsp. Fehler 2. Art (2)



► Testproblem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$

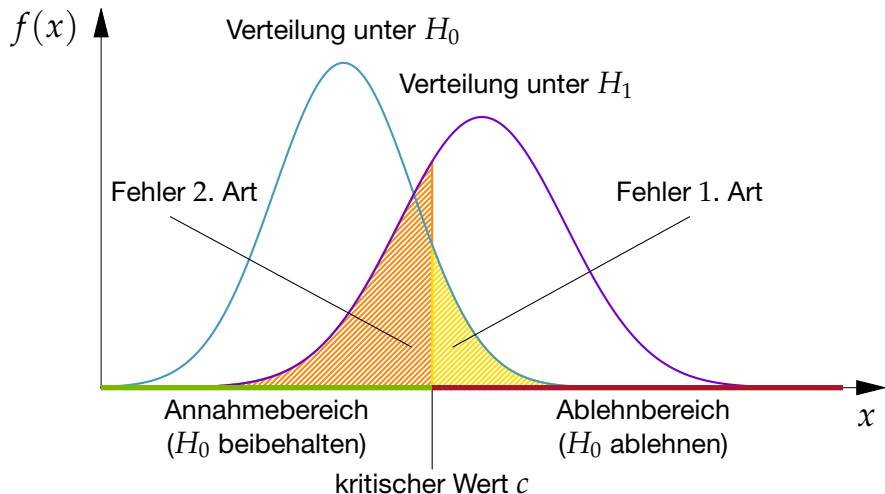


Abb.: Fehler 2. Art

Bsp. Fehler 2. Art (3)



► Testproblem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$

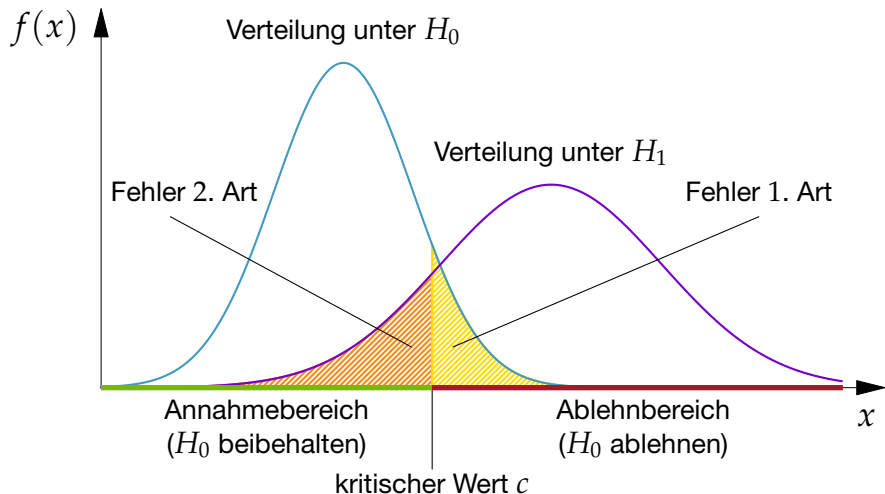


Abb.: Fehler 2. Art

- ▶ Die Entscheidung, H_0 nicht abzulehnen bedeutet nicht, dass H_0 wahrscheinlich richtig ist, sondern, dass H_0 richtig sein *könnte* (!)
- ▶ Ein nicht-signifikantes Ergebnis ist also kein Beleg dafür, dass die Nullhypothese richtig ist.
- ▶ Die Nullhypothese
 - ▶ abzulehnen, ist eine „starke“ Aussage, besonders, wenn sie „deutlich falsch“ ist.
 - ▶ beizubehalten, ist eine „schwache“ Aussage.

- ▶ Ein hypothetischer Erwartungswert μ_0 soll verglichen werden mit dem tatsächlichen, unbekanntem Erwartungswert $\mu = E(X)$.
- ▶ Annahmen: X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ unbekannt, bzw. beliebig verteilt bei $n > 30$
- ▶ Hypothesen:
 - a) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$
 - b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$
 - c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

- ▶ Prüfgröße: $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$ mit $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2}$
- ▶ Verteilung von T unter H_0 : $t(n-1)$, für $n > 30$ approximativ $N(0, 1)$
- ▶ Ablehnung von H_0 , falls
 - a) $|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$
 - b) $T < t_{\alpha}(n-1) = -t_{1-\alpha}(n-1)$
 - c) $T > t_{1-\alpha}(n-1)$,

wobei $t_p(n)$ das p -Quantil der t -Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet. Für $n > 30$ ersetze man t -Quantile durch $N(0, 1)$ -Quantile.



1. Erstelle eine inhaltliche Formulierung des Problems.
2. Formuliere das statistische Testproblem durch Null- und Alternativhypothese.
3. Lege ein Signifikanzniveau fest.
4. Wähle eine geeignete Prüfgröße und bestimme deren Verteilung unter der Nullhypothese.
5. Konstruiere den Ablehnbereich.
6. Berechne den Wert der Prüfgröße für die tatsächlich vorliegende Stichprobe.
7. Treffe die Testentscheidung und führe die sachlogische Interpretation durch.

► Beispiel Kaffee:

Der Student J. Krönung trinkt regelmäßig Kaffee, den er stets aus dem gleichen Kaffeeautomaten entnimmt. Er hat das Gefühl, dass in seinem Becher immer recht wenig enthalten ist.

Der Automatenbetreiber garantiert eine durchschnittliche Füllmenge von 200 ml mit einer Standardabweichung von $\sigma = 15$ ml.

J. Krönung möchte wissen, ob er davon ausgehen kann, dass die erwartete Füllmenge weniger als 200 ml beträgt.

► Beispiel Schokolade:

Ein Schokoladenhersteller vermutet Unregelmäßigkeiten in seiner Produktion in Bezug auf das Gewicht einer Tafel. Dieses sollte 102 g betragen.

Der Hersteller möchte prüfen, ob das erwartete Gewicht dem Sollwert entspricht.

▶ Beispiel Kaffee:

- ▶ einseitiges Testproblem

$$H_0 : \mu \geq 200 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < 200$$

▶ Beispiel Schokolade:

- ▶ zweiseitiges Testproblem

$$H_0 : \mu = 102 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq 102$$

3. Lege ein Signifikanzniveau fest



- ▶ Beispiel Kaffee:
 - ▶ maximale Irrtumswahrscheinlichkeit 5 %, d. h. Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$
- ▶ Beispiel Schokolade:
 - ▶ maximale Irrtumswahrscheinlichkeit 5 %, d. h. Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

- ▶ Beispiel Kaffee:
 - ▶ Annahme: Füllmenge X ist normalverteilt, d. h. X_1, \dots, X_n unabhängige Wiederholungen einer $N(\mu, \sigma)$ -verteilten Zufallsvariable mit bekannter Standardabweichung σ
 - ▶ für das Testproblem sensible Prüfgröße: \bar{X}
 - ▶ standardisierte Prüfgröße Z und deren Verteilung unter H_0 :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, \quad Z \sim N(0, 1)$$

- ▶ Beispiel Schokolade:
 - ▶ Annahme: Gewicht X ist normalverteilt, d. h. X_1, \dots, X_n unabhängige Wiederholungen einer $N(\mu, \sigma)$ -verteilten Zufallsvariable mit unbekannter Standardabweichung σ
 - ▶ für das Testproblem sensible Prüfgröße: \bar{X}
 - ▶ standardisierte Prüfgröße T und deren Verteilung unter H_0 :

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}, \quad T \sim t(n - 1)$$

- ▶ Beispiel Kaffee:
 - ▶ Basierend auf der Prüfgröße Z fällt die Entscheidung für H_1 im Testproblem

$$H_0 : \mu \geq 200 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < 200 ,$$

falls

$$Z < -z_{1-\alpha} = -z_{0.95} = -1.6449 .$$

5. Konstruiere den Ablehnbereich (2)



► Beispiel Kaffee:

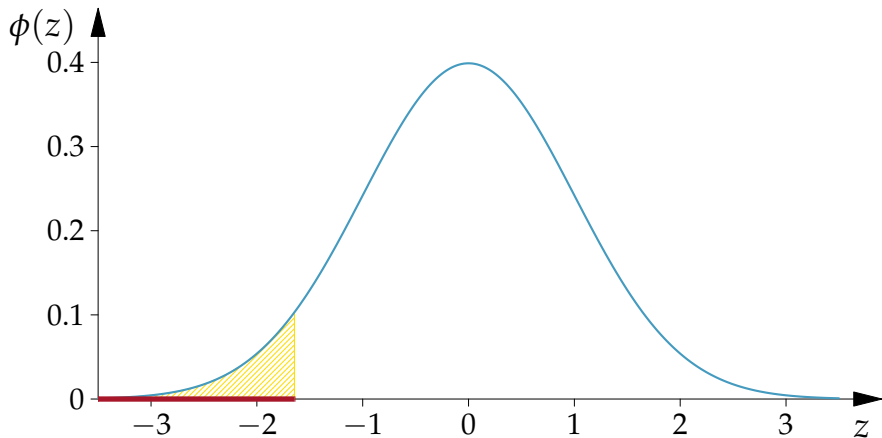


Abb.: Dichte der Prüfgröße Z mit dem Ablehnbereich

$C = (-\infty, -1.6449)$ (rot)

- ▶ Beispiel Schokolade:
 - ▶ Der geplante Stichprobenumfang beträgt $n = 15$.
 - ▶ Basierend auf der Prüfgröße T fällt die Entscheidung für H_1 im Testproblem

$$H_0 : \mu = 102 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq 102 ,$$

falls

$$|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(14) = 2.1448 .$$

5. Konstruiere den Ablehnbereich (4)



► Beispiel Schokolade:

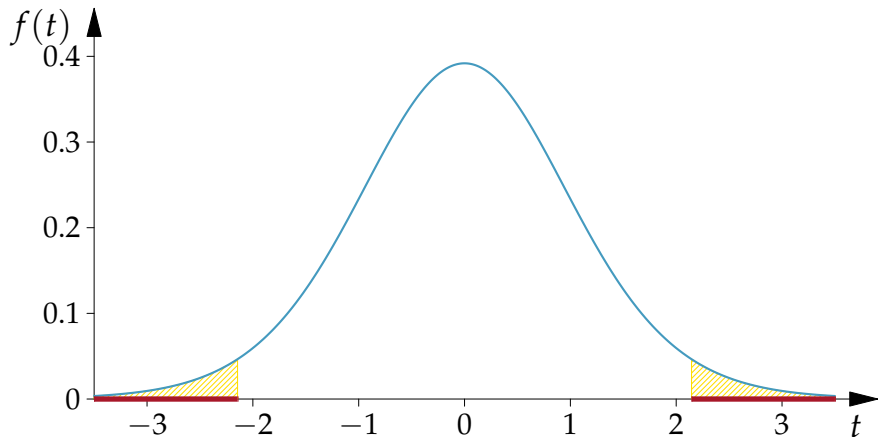


Abb.: Dichte der Prüfgröße T mit dem Ablehnbereich

$$C = (-\infty, -2.1448) \cup (2.1448, \infty) \text{ (rot)}$$

- ▶ Beispiel Kaffee:
 - ▶ Stichprobe: $n = 10$ zufällig ausgewählte und gemessene Kaffeebecher
 - ▶ durchschnittliche Füllmenge (in ml) in der Stichprobe: $\bar{x} = 190$
 - ▶ bekannte Standardabweichung (in ml): $\sigma = 15$
 - ▶ Wert der Prüfgröße:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{190 - 200}{15} \sqrt{10} = -2.1082$$

- ▶ Beispiel Schokolade:
 - ▶ Stichprobe: $n = 15$ zufällig ausgewählte und gewogene Schokoladentafeln aus der Produktion
 - ▶ durchschnittliches Gewicht (in g) in der Stichprobe: $\bar{x} = 104$
 - ▶ Stichprobenstandardabweichung (in g): $s = 5$
 - ▶ Wert der Prüfgröße:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} = \frac{104 - 102}{5} \sqrt{15} = 1.5492$$

- ▶ Beispiel Kaffee:
 - ▶ Da $-2.1082 < -1.6449$, kann H_0 abgelehnt werden.
 - ▶ Bei einer maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % ist die zu erwartende Füllmenge kleiner als 200 ml.

7. Testentscheidung u. Interpretation (2)

► Beispiel Kaffee:

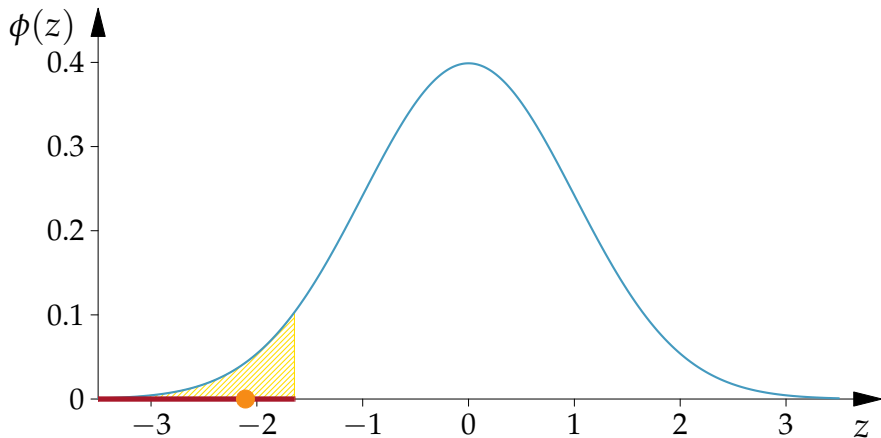


Abb.: Dichte der Prüfgröße Z mit dem Ablehnbereich (rot) und dem beobachteten Prüfgrößenwert -2.1082 (orange)

- ▶ Beispiel Schokolade:
 - ▶ Da $|1.5492| \not\geq 2.1448$, kann H_0 zum Signifikanzniveau 0.05 nicht verworfen werden.
 - ▶ Bei einem 5 %-Niveau liegen keine signifikanten Abweichungen des zu erwartenden Gewichts vom Sollgewicht von 102 g vor.

7. Testentscheidung u. Interpretation (4)

► Beispiel Schokolade:

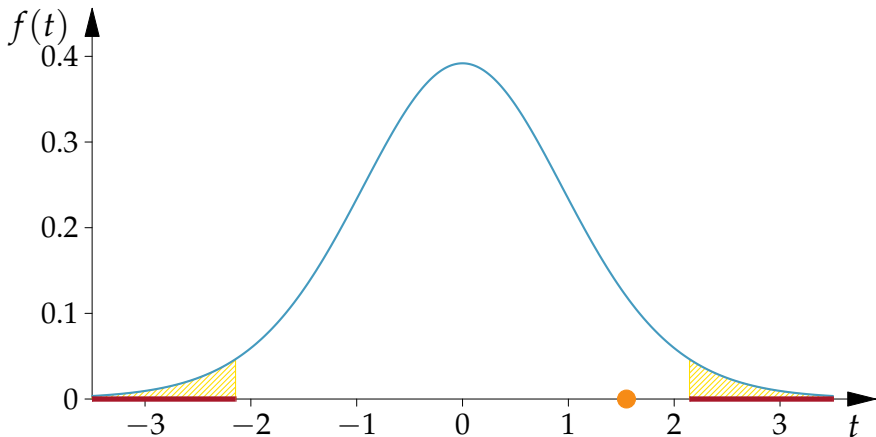
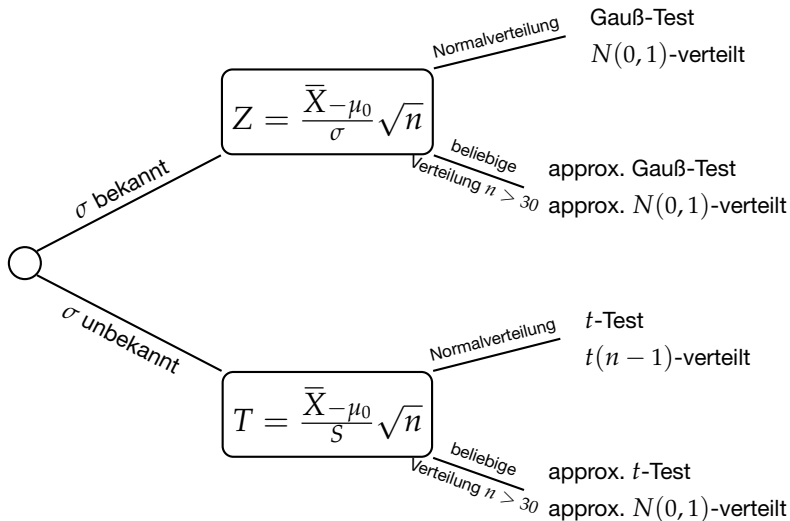


Abb.: Dichte der Prüfgröße T mit dem Ablehnbereich (rot) und dem beobachteten Prüfgrößenwert 1.5492 (orange)



- ▶ Zu dem berechneten Wert einer Prüfgröße kann die Fläche unter der Dichtefunktion in Richtung der Enden der Prüfverteilung bestimmt werden.
- ▶ Diese Fläche/Wahrscheinlichkeit wird als p -Wert bezeichnet.
- ▶ Gehört zur Standardausgabe bei statistischen Software-Paketen.

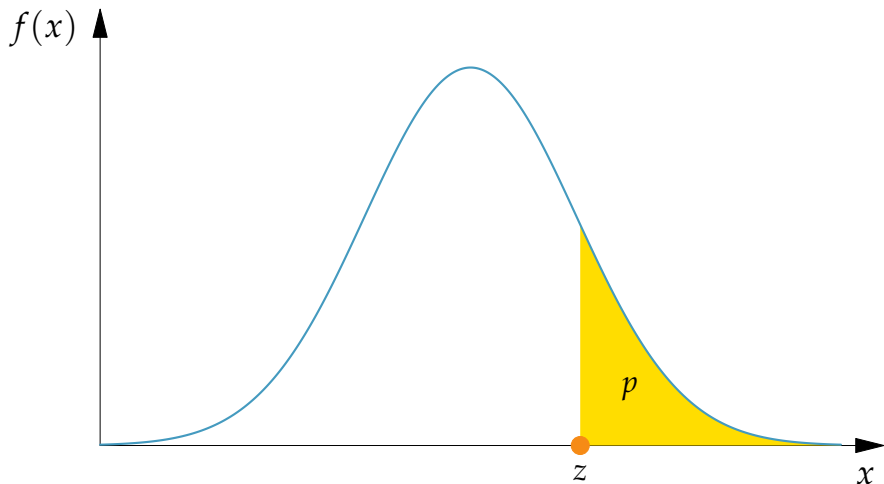


Abb.: Prüfverteilung mit beobachtetem Prüfgrößenwert z und zugehörigem einseitigen p -Wert

- ▶ **p -Wert:** Wahrscheinlichkeit dafür, den beobachteten Prüfgrößenwert oder einen in Richtung der Alternative extremeren Wert zu erhalten, falls in Wirklichkeit die Nullhypothese zutrifft



- ▶ Ist der p -Wert kleiner als das vorgegebene Signifikanzniveau α , so wird H_0 verworfen. Ansonsten behält man H_0 bei.

► Testproblem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$

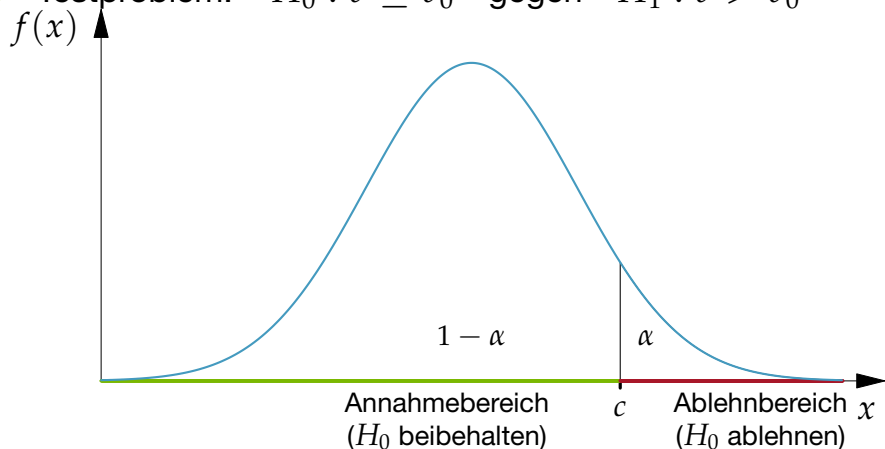


Abb.: Prüfverteilung mit Signifikanzniveau α , kritischem Wert c sowie Annahme- und Ablehnbereich

► Testproblem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$

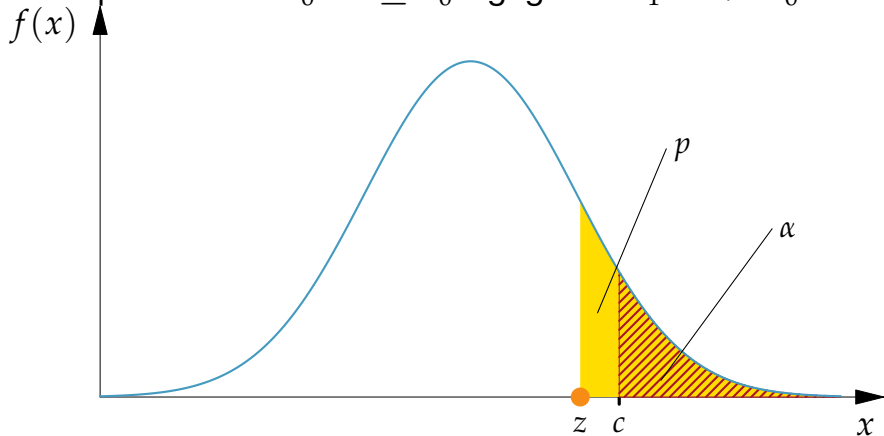


Abb.: Prüfverteilung mit Signifikanzniveau α und kritischem Wert c sowie beobachtetem Prüfgrößenwert z und p -Wert

► Testproblem: $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$

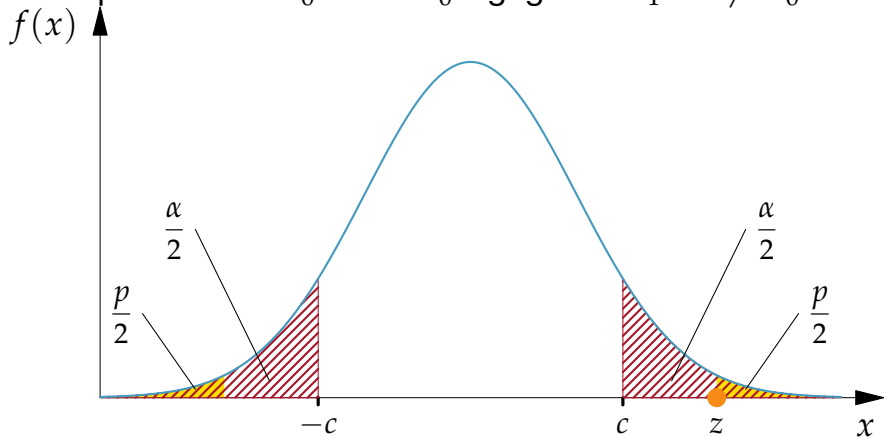


Abb.: Prüfverteilung mit Signifikanzniveau α und kritischen Werten $c, -c$ sowie Prüfgrößenwert z und p -Wert

- ▶ Wert der Prüfgröße:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{190 - 200}{15} \sqrt{10} = -2.1082$$

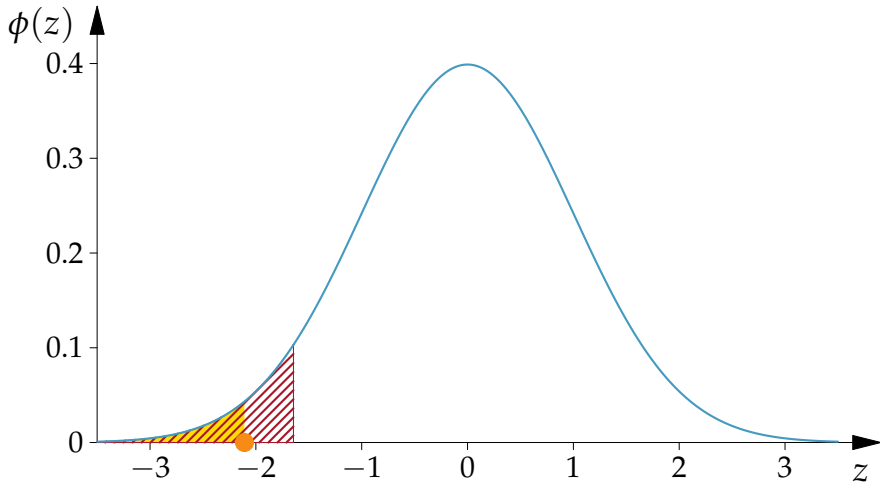


Abb.: Prüfverteilung mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ (rot),
Prüfgrößenwert -2.1082 (orange) und p -Wert (gelb)

- ▶ Wert der Prüfgröße:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{190 - 200}{15} \sqrt{10} = -2.1082$$

- ▶ Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeit in R :

```
pnorm(q = -2.1082)  
[1] 0.01751
```

- ▶ p -Wert: $p = 0.01751 = 1.751 \%$
- ▶ Testentscheidung: H_0 ablehnen, da $p < \alpha = 0.05$



- ▶ Wert der Prüfgröße:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} = \frac{104 - 102}{5} \sqrt{15} = 1.5492$$

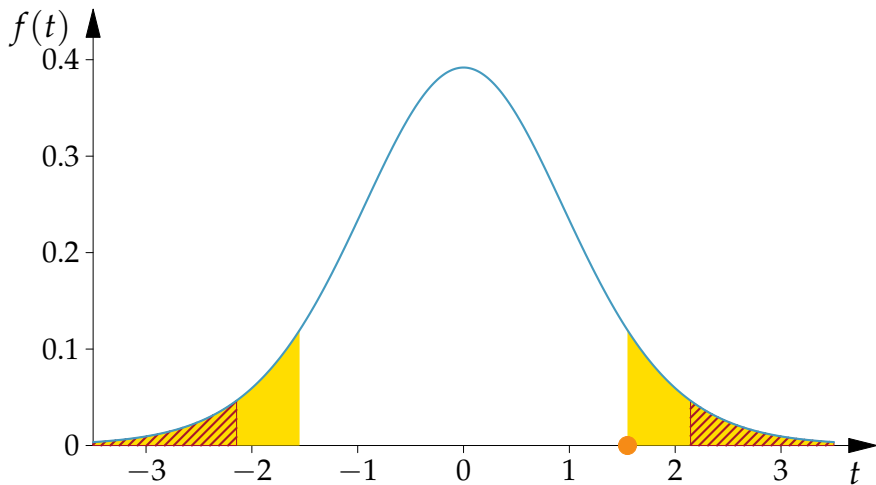


Abb.: Prüfverteilung mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ (rot),
Prüfgrößenwert 1.5492 (orange) und p -Wert (gelb)

- ▶ Wert der Prüfgröße:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} = \frac{104 - 102}{5} \sqrt{15} = 1.5492$$

- ▶ Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeit in R :

```
1 - pt(q = 1.5492, df = 14)  
[1] 0.07182
```

- ▶ p -Wert: $p = 2 \cdot 0.07182 = 0.14364 = 14.364\%$
- ▶ Testentscheidung: H_0 nicht ablehnen, da $p \not< \alpha = 0.05$

- ▶ von entscheidender Bedeutung:
 - ▶ die Funktion des Tests
 - ▶ das Datenniveau (nominal/ordinal/metrisch)
 - ▶ die Verteilung der Daten
(normalverteilt/symmetrisch/weder noch)
 - ▶ die Stichprobe (verbunden/unverbunden)