

Grundlagen der Statistik

13. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bei einer neu angeschafften Abfüllanlage garantiert der Hersteller eine mittlere Abfüllmenge von 330 ml bei einer Standardabweichung von $\sigma = 5$ ml. Eine Stichprobe von $n = 16$ Behältern ergab eine durchschnittliche Füllmenge von 327 ml. Es wird angenommen, dass die Abfüllmenge normalverteilt ist.

Überprüfen Sie die Behauptung des Herstellers der Abfüllanlage, dass die mittlere Abfüllmenge 330 ml beträgt.

- Formulieren Sie das Testproblem durch Angabe der Null- und Alternativhypothese.
- Legen Sie die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit auf 5% fest.
- Wählen Sie eine geeignete Prüfgröße. Wie ist diese unter der Nullhypothese verteilt?
- Bestimmen Sie den Ablehnbereich der standardisierten Prüfgröße und veranschaulichen Sie diesen.
- Berechnen Sie den Wert der standardisierten Prüfgröße.
- Führen Sie den Hypothesentest durch und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Stichprobe mit $n = 40$ Beobachtungen:

0.2, 0.6, 2.9, 0.7, 1.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 0.0,
0.2, 0.8, 0.2, 0.0, 1.2, 2.4, 0.1, 0.3, 0.4, 0.7,
0.6, 0.6, 0.3, 0.5, 0.2, 0.2, 2.5, 0.5, 0.1, 0.7,
1.3, 0.1, 0.2, 0.7, 2.0, 1.1, 0.5, 0.6, 2.4, 0.3

Lösen Sie die folgenden Aufgaben in \mathbf{R} .

- Stellen Sie die Stichprobe in einem Histogramm mit der Fläche 1 dar. Wie könnte die zugehörige stetige Zufallsvariable verteilt sein?
- Schätzen Sie auf Basis der Stichprobe die Parameter der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:
 - Normalverteilung
 - Exponentialverteilung
 - χ^2 -Verteilung
- Fügen Sie die Dichtefunktionen der angepassten Verteilungen in unterschiedlichen Farben dem Histogramm aus a) hinzu.
- Beurteilen Sie auf Grundlage der grafischen Darstellung, welches der drei Modelle die Daten am besten beschreibt.

Aufgabe 3:

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Wiederholungen einer $N(\mu, \sigma)$ -verteilten Zufallsvariable X . Dann erhält man $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervalle für σ durch

$$\left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} \cdot S, \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}} \cdot S \right],$$

wobei $\chi_p^2(n-1)$ das p -Quantil der χ^2 -Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden bezeichnet und

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

eine Schätzfunktion für σ ist.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben in **R**.

- Schreiben Sie die Funktion *KI.sigma*, die für gegebene Daten und gegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit das Konfidenzintervall für die unbekannte Standardabweichung σ bestimmt.
- Testen Sie Ihre Funktion mit den Daten

190, 170, 194, 183, 184, 194, 185, 169, 178, 181,
177, 187, 187, 184, 177, 190, 188, 195, 178, 171, 181

und einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % sowie 99 %.